

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ
ГЛАВЫ**

7-8

по курсу математики

Дополнительные главы по курсу МАТЕМАТИКИ

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ПО ФАКУЛЬТАТИВНОМУ КУРСУ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 7-8 КЛАССОВ**

СБОРНИК СТАТЕЙ

Составитель *Н. П. Сикорский*

ИЗДАНИЕ 2-е, ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Москва «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1974

51 (075)
С 35

*Рекомендовано к изданию
Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР*

- Сикорский К. П.**
С 35 **Дополнительные главы по курсу математики.**
Учебное пособие по факультативному курсу для
учащихся 7—8 классов. Сост. К. П. Сикорский.
Изд. 2-е, доп. М., «Просвещение», 1974.

367 с.

Книга состоит из статей, содержащих теоретический учебный материал и набор упражнений по темам факультативных курсов по математике для 7—8 классов.



Д $\frac{60601-345}{103(03)-74}$ Инф. письмо.

51(075)

Настоящий сборник состоит из учебных материалов для факультативных занятий по математике в VII—VIII классах.

Содержание этих материалов определяется соответствующими программами, опубликованными в журнале «Математика в школе» (1967, № 2), а также в специальной брошюре «Программы факультативных курсов для восьмилетней школы» (изд. «Просвещение». М., 1967).

В сборнике освещены почти все темы этих программ, одни более подробно (множества, метод координат, функции и графики), в статьях по другим темам изложение менее детальное.

Пособием по темам «Симметрия» (VII класс) и «Геометрические преобразования» (VIII класс) может служить учебное пособие для IX класса средней школы В. Г. Болтянского и И. М. Яглома «Геометрия» (изд. «Просвещение». М., 1964), главы I—VI первой части и соответствующие задачи. Это пособие вполне доступно для учащихся. Дополнительный материал по этим темам учитель найдет в книге тех же авторов «Преобразования и векторы» (изд. «Просвещение». М., 1964).

«Задачи по общему курсу» не распределены по классам. С учащимися как VII, так и VIII классов, записавшимися на факультативные занятия по математике, полезно рас-

смотреть все упражнения, данные в сборнике, решение которых основано на знании арифметики, а также упражнения, сводящиеся к преобразованиям многочленов. Большая часть задач по геометрии может быть решена на основании теоретического курса, изучаемого в VI—VII классах. Учитель, ориентируясь на знания своих учащихся, отберет из предлагаемых задач те, которые, по его мнению, необходимо включить в план факультативных занятий в VII и в VIII классах.

Во втором издании настоящего сборника по сравнению с первым внесены следующие изменения:

1. Добавлена статья «Номограммы», т. е. дан учебный материал по 6-й теме программы факультативного курса по математике для VIII класса.

2. Даны ответы и указания к решению наиболее трудных задач в статьях «Делимость чисел и простые числа» и «Элементы теории множеств».

3. В статье «Решение задач по общему курсу» часть задач заменена другими; частично включены задачи, близкие по содержанию к новым программам.

§ 1. Целые числа и действия над ними

Множество целых чисел состоит из натуральных чисел 1, 2, 3, ..., нуля 0 и отрицательных целых чисел -1 , -2 , -3 , В этом множестве всегда выполнимы операции сложения и вычитания. Иначе говоря, если m и n — целые числа, то их сумма $m+n$ тоже является целым числом. Далее, для любых двух целых чисел m , n существует (и притом только одно) число x , удовлетворяющее уравнению

$$n+x=m;$$

это число называется *разностью* чисел m и n и обозначается через $m-n$. Разность любых двух целых чисел тоже является целым числом.

В множестве целых чисел всегда выполнимо и умножение, т. е. если m и n — целые числа, то их произведение mn тоже является целым числом. Однако деление (действие, обратное умножению) выполнимо в множестве целых чисел не всегда. Результат деления числа a на число $b \neq 0$ (частное от деления a на b) обозначается через $a:b$ (или $\frac{a}{b}$). Напомним, что частным от деления числа a на число $b \neq 0$ называется число x , удовлетворяющее уравнению

$$bx=a,$$

такое число существует, и притом только одно. Однако частное от деления одного целого числа на другое не всегда является целым числом. Например, частные $5:2$, $2:5$, $(-40):7$, $(-30):(-21)$ целыми числами не являются.

Это и означает, что деление не всегда выполнимо в множестве целых чисел: частное от деления целого числа a на целое число $b \neq 0$ может оказаться лежащим за пределами множества целых чисел, а в самом множестве целых чисел не найдется такого числа, которое мы могли бы назвать частным от деления a на b .

Встречаются, конечно, и такие случаи, когда частное от деления одного целого числа на другое опять является целым числом. Например: $6 : (-2) = -3$, $36 : 12 = 3$, $(-5) : 5 = -1$.

Определение. Если a и b (где $b \neq 0$) — такие целые числа, что частное $a : b$ тоже является целым числом, то говорят, что число a делится на b .

Можно сказать и иначе: целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если найдется такое целое число k , что $a = kb$. Этим определением делимости мы чаще всего и будем пользоваться в дальнейшем. Так как мы всюду будем говорить только о целых числах, то нередко для краткости будем писать просто «число», всегда подразумевая под этим целое число.

Подчеркнем, что о частном $a : b$ мы можем говорить лишь при $b \neq 0$. При $b = 0$ частное $a : b$ не определено, т. е. выражениям $a : 0$, $\frac{a}{0}$ не придается никакого смысла.

Короче, на нуль делить нельзя.

Напротив, при $a = 0$ (и любом $b \neq 0$) частное $a : b$ определено (и равно нулю):

$$\frac{0}{b} = 0 \quad (\text{при } b \neq 0).$$

Так как в этом случае частное (т. е. нуль) является целым числом, то нуль делится на любое целое число, отличное от нуля (причем частное равно нулю).

§ 2. Теоремы о делимости

Теорема 1. *Если оба числа a и b делятся на m , то и их сумма $a + b$ и их разность $a - b$ делятся на m .*

Действительно, так как a делится на m , то $a = km$, где k — некоторое целое число. Точно так же $b = lm$, где l — некоторое целое число. Поэтому

$$a + b = km + lm = (k + l)m, \quad a - b = km - lm = (k - l)m,$$

откуда видно, что каждое из чисел $a+b$, $a-b$ делится на m .

Точно так же можно доказать, что сумма трех (или вообще любого числа) слагаемых, каждое из которых делится на m , также делится на m .

Следствие 1. Если сумма нескольких слагаемых делится на m и известно, что все слагаемые, кроме одного, делятся на m , то и оставшееся слагаемое также делится на m .

Докажем это, например, для случая трех слагаемых. Слагаемые обозначим через a , b , c , а их сумму — через s :

$$a+b+c=s.$$

Нам известно, что s делится на m и числа a и b делятся на m , т. е. $s=qt$, $a=km$, $b=lm$, где q , k , l — некоторые целые числа. Надо доказать, что и слагаемое c делится на m . Мы имеем:

$$c=s-a-b=qt-km-lm=(q-k-l)m,$$

откуда и следует, что c делится на m .

Теорема 2. Если a делится на m и b делится на n , то ab делится на mn .

В самом деле, $a=km$, $b=ln$, и потому

$$ab=km \cdot ln=(kl)mn,$$

т. е. ab делится на mn .

Эта теорема легко обобщается на случай трех и большего числа множителей. Например, если a делится на m , b делится на n и c делится на p , то abc делится на mnp .

Следствие 2. Если a делится на m , то a^n делится на m^n (здесь n — любое натуральное число).

Следствие 3. Если хотя бы один из множителей делится на m , то и произведение делится на m .

В самом деле, пусть a делится на m и пусть b — любое целое число. Так как b , очевидно, делится на 1, то (по теореме 2) ab делится на $m \cdot 1$, т. е. ab делится на m .

Можно, конечно, доказать это следствие и иначе, без ссылки на теорему 2. Именно $a=km$ (так как a делится на m) и потому

$$ab=km \cdot b=(kb)m,$$

откуда видно, что ab делится на m .

Упражнения

1. Делится ли число a на $-a$? Делится ли число $-a$ на a ? В каком случае два целых числа a и b обладают тем свойством, что a делится на b и b делится на a ?

2. Числа a и b таковы, что $0 < a < b$. Может ли a делиться на b ? Почему?

3. Докажите, что если $a \neq b$, то число $a^n - b^n$ делится на $a - b$ (здесь n — произвольное натуральное число).

4. Докажите, что если $a + b \neq 0$, то для любого нечетного натурального n число $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

5. Докажите, что для любого целого n число $n(n+1)$ делится на 2 (т. е. является четным).

6. Докажите, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ тоже делится на $a - c$ (здесь a, b, c, d — целые числа, причем $a \neq c$).

7. Дробь $\frac{a}{b}$ сократима. Сократима ли дробь $\frac{a-b}{a+b}$?

8. Докажите, что разность любого трехзначного числа и трехзначного числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.

9. Докажите, что трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.

10. Докажите, что если в трехзначном числе две последние цифры одинаковы, а сумма его цифр делится на 7, то и само число делится на 7.

§ 3. Деление с остатком

Разделим 20 на 3 «в столбик»:

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

Мы получили частное 6 и остаток 2. Но что это значит? Это значит, что если мы уменьшим число 20 на 2, то получим число, которое делится на 3 (и в частном будет 6), т. е.

$$20 - 2 = 3 \cdot 6.$$

Иначе это можно записать так:

$$20 = 3 \cdot 6 + 2.$$

Рассмотрим еще пример деления с остатком:

$$\begin{array}{r} 49 \overline{) 3} \\ -3 \\ \hline 19 \\ -18 \\ \hline 1 \end{array}$$

У нас получилось частное 16 и остаток 1. Это можно записать так:

$$49 = 3 \cdot 16 + 1.$$

Мы видим, что если число a дает при делении на 3 частное q и остаток r , то мы можем написать:

$$a = 3q + r.$$

Вообще, если нам известно, что число a дает при делении на b частное q и остаток r , то мы можем написать

$$a = bq + r.$$

Но не всякую запись $a = bq + r$ можно прочесть как запись деления с остатком. Например, равенство $20 = 3 \cdot 4 + 8$ справедливое, но мы не можем сказать, что 20 при делении на 3 дает в остатке 8. Остаток ведь должен быть меньше делителя! Точно так же запись $20 = 3 \cdot 7 + (-1)$ не означает, что 20 при делении на 3 дает в остатке -1 ; остаток не должен быть отрицательным. Значит, для того чтобы запись $a = bq + r$ выражала деление a на b с остатком, нужно потребовать, чтобы r было неотрицательным числом, меньшим b , т. е. $0 \leq r < b$.

Проведенные рассуждения вовсе не «доказывают» чего-либо; они лишь служат пояснением к тому, что такое деление с остатком. А теперь мы введем точное определение.

Определение. Пусть a и b — два целых числа, причем $b > 0$. Если число a можно записать в виде $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$, то говорят, что a дает при делении на b частное q и остаток r .

Упражнения

11. Найдите частные и остатки при делении на 7 следующих чисел:

3, 5, 10, 35, 100, 0, -1 , -7 , -12 , -50 .

12. Найдите частные и остатки при делении тех же чисел на 10.

13. Число a дает при делении на b остаток r . Какой остаток при делении на b дает число $-a$?

14. Докажите, что если число a дает при делении на b остаток r , то $a-r$ делится на b . Верно ли обратное?

15. Известно, что число a дает при делении на m остаток r . Можно ли сказать, что a дает при делении на t остаток r ? В каком случае это будет верно?

§ 4. Существование и единственность деления с остатком

В предыдущем параграфе было дано определение деления с остатком. В связи с этим определением естественно возникают два вопроса:

а) Всегда ли можно осуществить деление с остатком? Иначе говоря, если даны целое число a и натуральное число b , всегда ли можно подобрать такие целые числа q и r , что $0 \leq r < b$ и $a = bq + r$?

б) Единственным ли образом осуществляется деление с остатком? Иными словами, если число a записано двумя способами в требуемом виде:

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b;$$

$$a = bq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < b,$$

то обязательно ли обе записи совпадают (т. е. $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$)?

Нижеследующая теорема дает на оба эти вопроса утвердительный ответ: деление с остатком всегда осуществимо и притом однозначно.

Теорема. Пусть даны целое число a и натуральное число b . Тогда можно подобрать такие целые числа q и r , что $0 \leq r < b$ и $a = bq + r$. Числа q и r определяются этими условиями однозначно.

Доказательство. Выберем такое натуральное число c , что $|a| < c$, и рассмотрим числа

$$-cb, (-c+1)b, (-c+2)b, \dots, \\ -2b, -b, 0, b, 2b, \dots, (c-1)b, cb.$$

Каждое из чисел этой последовательности (кроме первого) ровно на b больше предыдущего, так что числа эти возрастают. При этом первое число $-cb$ меньше, чем a , а последнее число cb больше, чем a . В самом деле, так как $|a| < c \leq cb$ (поскольку $b \geq 1$), то $|a| < cb$, т. е. $-cb < a < cb$. Значит, в рассматриваемой возрастающей последовательности чисел найдется последнее число, которое еще не превосходит a (так что следующее число уже будет больше a). Обозначим это последнее число, не превосходящее a , через qb . Следующее число, т. е. $(q+1)b$, будет уже больше a :

$$qb \leq a < (q+1)b.$$

Теперь число q выбрано. Обозначим через r число $a - qb$, так что

$$a = qb + r.$$

Тогда написанные неравенства принимают вид

$$qb \leq qb + r < (q+1)b.$$

Уменьшая все три числа, участвующие в этом неравенстве, на qb , получим

$$0 \leq r < b.$$

Итак, требуемые числа q и r найдены, т. е. доказано, что деление с остатком всегда осуществимо.

Докажем единственность. Допустим, что число a двумя способами представлено в требуемом виде:

$$a = q_1b + r_1, \quad \text{где } 0 \leq r_1 < b;$$

$$a = q_2b + r_2, \quad \text{где } 0 \leq r_2 < b.$$

Вычитая написанные равенства одно из другого, находим

$$(q_1 - q_2)b + (r_1 - r_2) = 0, \quad (1)$$

т. е. $r_1 - r_2 = -(q_1 - q_2)b$, откуда видно, что число $r_1 - r_2$ делится на b .

Предположим теперь, что $r_1 \neq r_2$, и пусть, для определенности, $r_1 > r_2$. Тогда $r_1 - r_2 > 0$ и, кроме того,

$r_1 - r_2 \leq r_1 < b$. Мы видим, что $r_1 - r_2$ есть натуральное число, меньшее, чем b , и потому $r_1 - r_2$ не делится на b . Полученное противоречие показывает, что должно быть $r_1 = r_2$.

Теперь равенство (1) принимает вид: $(q_1 - q_2)b = 0$. Так как $b \neq 0$ (ведь b — натуральное число), то отсюда следует, что $q_1 - q_2 = 0$, т. е. $q_1 = q_2$.

Теорема доказана полностью.

Из этой теоремы вытекает, что каждое целое число a может быть представлено:

либо в виде $a = bq$,

либо в виде $a = bq + 1$,

либо в виде $a = bq + 2$,

...

либо в виде $a = bq + (b - 1)$.

Например, при $b = 2$ мы получаем: каждое целое число a может быть представлено либо в виде $a = 2q$ (и тогда оно делится на 2, т. е. четно), либо в виде $a = 2q + 1$ (и тогда оно не делится на 2, т. е. нечетно). При $b = 3$ получаем: каждое целое число a может быть представлено в одном из следующих видов: $3q$, $3q + 1$, $3q + 2$. Это замечание часто используется при решении задач.

Пример 1. Доказать, что при любом целом n число $n^3 - n$ делится на 6.

Решение. Разложим выражение $n^3 - n$ на множители:

$$n^3 - n = n(n + 1)(n - 1).$$

Число n может быть представлено в одном из следующих видов: $6q$, $6q + 1$, $6q + 2$, $6q + 3$, $6q + 4$, $6q + 5$. Если $n = 6q$, то $n^3 - n = n(n + 1)(n - 1) = 6q(6q + 1)(6q - 1)$; видно, что это число делится на 6. Далее, если $n = 6q + 1$, то

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n + 1)(n - 1) = \\ &= (6q + 1)(6q + 2)6q = 12(6q + 1)(3q + 1)q; \end{aligned}$$

и в этом случае число $n^3 - n$ делится на 6 (и даже на 12). При $n = 6q + 2$ имеем:

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n + 1)(n - 1) = \\ &= (6q + 2)(6q + 3)(6q + 1) = 6(3q + 1)(2q + 1)(6q + 1), \end{aligned}$$

так что число $n^3 - n$ и в этом случае делится на 6. Аналогично разбираются три оставшихся случая (когда n

имеет вид $6q+3$, $6q+4$ или $6q+5$). Итак, каково бы ни было n , число n^3-n всегда делится на 6.

Пример 2. Доказать, что ни при каком целом n число n^2+1 не делится на 3.

Решение. При $n=3q$ имеем:

$$n^2+1=9q^2+1,$$

откуда видно, что n^2+1 дает при делении на 3 остаток 1 и, значит, не делится на 3. Далее, при $n=3q+1$ имеем:

$$n^2+1=(3q+1)^2+1=9q^2+6q+2=3(3q^2+2q)+2;$$

это число дает при делении на 3 остаток 2, т. е. опять не делится на 3. Наконец, при $n=3q+2$ имеем:

$$n^2+1=(3q+2)^2+1=9q^2+12q+5=3(3q^2+4q+1)+2;$$

это число опять дает при делении на 3 остаток 2, т. е. на 3 не делится. Итак, в любом случае число n^2+1 на 3 не делится.

Упражнения

16. Докажите, что при любом целом n число n^3+5n делится на 6.

17. Докажите, что при любом целом n число n^3+11n делится на 6.

18. Докажите, что при любом целом n число n^3+3n^2+2n делится на 6.

19. Докажите, что при любом целом n число n^2+n четно.

20. Докажите, что если $a > b > 0$, то остаток, который дает число a при делении на b , меньше $\frac{a}{2}$.

21. При каких n число n^2-1 делится на 3?

22. Докажите, что если числа a и b не делятся на 3, но дают одинаковые остатки при делении на 3, то число $ab-1$ делится на 3. Обратно, если $ab-1$ делится на 3, то числа a и b не делятся на 3 и дают одинаковые остатки при делении на 3.

23. Докажите, что если числа a и b не делятся на 3 и дают разные остатки при делении на 3, то число $ab+1$ делится на 3. Обратно, если $ab+1$ делится на 3, то числа

a и b не делятся на 3 и дают разные остатки при делении на 3.

24. Докажите, что, каковы бы ни были целые числа a и b , число $ab(a^2 - b^2)$ всегда делится на 3.

25. Докажите, что, каковы бы ни были целые числа a и b , число $ab(a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)$ всегда делится на 5.

26. Докажите, что, каковы бы ни были целые числа a и b , число $ab(a^4 - b^4)$ всегда делится на 5.

27. Докажите, что при любом целом n число $n^2(n^2 - 1)$ делится на 4.

28. Докажите, что при любом целом n число $n^5 - n$ делится на 5.

29. Докажите, что при любом целом n число $n(n^6 - 1)$ делится на 7.

30. Докажите, что если хотя бы одно из чисел a , b не делится на 7, то и число $a^2 + b^2$ не делится на 7.

31. Докажите, что при любом целом n число $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 6.

32. Числа a и b не делятся на c . В каком случае $a - b$ делится на c ? В каком случае $a + b$ делится на c ?

33. Докажите, что, каковы бы ни были целые числа a , b , c , число $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ не делится на 8.

34. Докажите, что если a нечетно, то $a^2 - 1$ делится на 8.

35. Докажите, что если m и n — нечетные числа, то число $m^2 - n^2$ делится на 8.

36. Докажите, что если сумма трех целых чисел делится на 6, то и сумма их кубов делится на 6.

37. Даны два трехзначных числа, причем ни одно из них не делится на 37, а сумма их делится на 37. Приписав одно из чисел к другому, получаем некоторое шестизначное число. Докажите, что оно делится на 37.

38. Из трех различных цифр получают шесть трехзначных чисел, всевозможным образом переставляя эти цифры (например: 123, 132, 213, 231, 312, 321). Докажите, что если среди этих шести чисел найдется число, делящееся на 37, то обязательно среди них будут и еще два числа, делящиеся на 37.

39. Даны два трехзначных числа, дающие одинаковые остатки при делении на 7. Приписав одно из чисел к другому, получаем некоторое шестизначное число. Докажите, что оно делится на 7.

§ 5. Сравнения

Определение. Если два числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m , то говорят, что a и b сравнимы по модулю m , и пишут

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Запись $a \equiv b \pmod{m}$ можно прочесть так: a сравнимо с b по модулю m . Использование этой записи делает формулировки и вычисления более удобными.

Докажем несколько теорем о сравнениях.

Теорема 1. Сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ имеет место в том и только в том случае, если разность $a - b$ делится на m .

Иначе говоря, числа a и b в том и только в том случае имеют одинаковые остатки при делении на m , если $a - b$ делится на m .

Доказательство. Предположим, что $a \equiv b \pmod{m}$, т. е. числа a и b дают при делении на m один и тот же остаток r . Тогда

$$a = mq + r,$$

$$b = mq' + r,$$

где q, q' — некоторые целые числа. Вычитая одно равенство из другого, получаем: $a - b = mq - mq' = m(q - q')$, откуда и следует, что разность $a - b$ делится на m .

Обратно, пусть $a - b$ делится на m , т. е. $a - b = km$. Произведем деление (с остатком) числа b на m :

$$b = qm + r, \text{ где } 0 \leq r < m.$$

Сложив равенства $a - b = km$ и $b = qm + r$, получаем

$$a = km + qm + r = (k + q)m + r,$$

причем по-прежнему $0 \leq r < m$. Отсюда видно, что число a имеет тот же остаток r при делении на m , что и число b , т. е. $a \equiv b \pmod{m}$.

Теорема 2. Сравнения можно почленно складывать и вычитать, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ и $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

Иначе говоря, если a и b имеют одинаковые остатки при делении на m и, кроме того, c и d имеют одинаковые остатки при делении на m , то числа $a + c$ и $b + d$ имеют одинаковые остатки при делении на m и также

числа $a - c$ и $b - d$ имеют одинаковые остатки при делении на m . Как видите, с помощью сравнений эта теорема формулируется короче и удобнее.

Доказательство. Так как $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то по теореме 1 числа $a - b$ и $c - d$ делятся на m , т. е. $a - b = km$, $c - d = lm$. Складывая эти два равенства, получаем $a - b + c - d = km + lm$, или $(a + c) - (b + d) = (k + l)m$.

Таким образом, разность $(a + c) - (b + d)$ делится на m , а потому по теореме 1 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

Сравнение $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ доказывается аналогично.

Теорема 3. *Сравнения можно почленно умножать, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.*

Доказательство. Так как $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то по теореме 1 $a - b = km$, $c - d = lm$. Поэтому $ac - bd = (ac - ad) + (ad - bd) = a(c - d) + d(a - b) = alm + dkm = (al + dk)m$, т. е. разность $ac - bd$ делится на m . Следовательно, по теореме 1 $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Конечно, теоремы 2 и 3 верны для любого числа слагаемых или множителей. Например, для трех сравнений: если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ и $e \equiv f \pmod{m}$, то $a + c + e \equiv b + d + f \pmod{m}$ и $ace \equiv bdf \pmod{m}$.

Следствие 1. *Сравнения можно возводить в степень, т. е. если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.*

Следствие 2. Рассмотрим некоторый многочлен с целыми коэффициентами: $k_0x^n + k_1x^{n-1} + \dots + k_{n-1}x + k_n$. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то значения, которые принимает этот многочлен при $x = a$ и при $x = b$, также сравнимы между собой по модулю m , т. е. $k_0a^n + k_1a^{n-1} + \dots + k_{n-1}a + k_n \equiv k_0b^n + k_1b^{n-1} + \dots + k_{n-1}b + k_n \pmod{m}$.

§ 6. Решение задач с помощью сравнений

Пример 1. Доказать, что при любом натуральном n число $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133.

Решение. Мы имеем:

$$12^{2n+1} = 12 \cdot 12^{2n} = 12 \cdot 144^n.$$

Но $144 \equiv 11 \pmod{133}$, и потому согласно следствию 1 $144^n \equiv 11^n \pmod{133}$. Умножая на 12, получаем (по теореме 3): $12 \cdot 144^n \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}$, так что $12^{2n+1} \equiv$

$\equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}$. Далее, $11^{n+2} = 121 \cdot 11^n$. А так как $121 \equiv -12 \pmod{133}$, то $121 \cdot 11^n \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}$, т. е. $11^{n+2} \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}$. Складывая сравнения

$$\begin{aligned}12^{2n+1} &\equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}, \\11^{n+2} &\equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}\end{aligned}$$

(это можно делать по теореме 2), получаем $12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133}$, т. е. число $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133.

Пример 2. Решим задачу 18 (стр. 13).

Решение. Всякое целое число n дает при делении на 6 один из остатков 0, 1, 2, 3, 4, 5, т. е. имеет место одно из сравнений:

$$\begin{aligned}n &\equiv 0 \pmod{6}, \quad n \equiv 1 \pmod{6}, \quad n \equiv 2 \pmod{6}, \quad n \equiv 3 \pmod{6}, \\n &\equiv 4 \pmod{6}, \quad n \equiv 5 \pmod{6}.\end{aligned}$$

Если $n \equiv 0 \pmod{6}$, то по следствию $2n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \pmod{6}$, т. е. $n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 0 \pmod{6}$. Если $n \equiv 1 \pmod{6}$, то (опять по следствию 2) $n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \pmod{6}$, т. е. $n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 6 \equiv 0 \pmod{6}$. Если $n \equiv 2 \pmod{6}$, то $n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \pmod{6}$, т. е. $n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 24 \equiv 0 \pmod{6}$. Аналогично рассматриваются три оставшихся случая. Итак, в любом случае $n^3 + 3n^2 + 2n \equiv 0 \pmod{6}$, т. е. $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится на 6.

Решите эту же задачу методом, указанным в § 4. Какое решение проще?

Пример 3. Доказать, что если $a^2 + b^2 + c^2$ делится на 9, то хотя бы одно из чисел $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, $b^2 - c^2$ делится на 9.

Решение. Мы имеем (в силу следствия 1):

$$\begin{aligned}\text{если } n &\equiv 0 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 0 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 1 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 1 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 2 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 4 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 3 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 9 \equiv 0 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 4 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 16 \equiv 7 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 5 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 25 \equiv 7 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 6 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 36 \equiv 0 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 7 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 49 \equiv 4 \pmod{9}; \\ \text{если } n &\equiv 8 \pmod{9}, \text{ то } n^2 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{9}.\end{aligned}$$

Итак, каково бы ни было целое число n , число n^2 может иметь при делении на 9 только остатки 0, 1, 4, 7.

Обозначим через r_1, r_2, r_3 остатки, которые дают при делении на 9 числа a^2, b^2, c^2 , так что

$$a^2 \equiv r_1 \pmod{9}, \quad b^2 \equiv r_2 \pmod{9}, \quad c^2 \equiv r_3 \pmod{9}.$$

Складывая эти сравнения, получаем:

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv r_1 + r_2 + r_3 \pmod{9}.$$

А так как по условию $a^2 + b^2 + c^2$ делится на 9, т. е. $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{9}$, то $r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod{9}$. Но каждое из чисел r_1, r_2, r_3 может принимать лишь значения 0, 1, 4, 7. Легко видеть поэтому, что сумма $r_1 + r_2 + r_3$ может делиться на 9 лишь в следующих случаях:

- 1) $r_1 = r_2 = r_3 = 0$;
- 2) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 1, два других равны 4;
- 3) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 7, два других равны 1;
- 4) одно из чисел r_1, r_2, r_3 равно 4, два других равны 7.

Во всех случаях среди чисел r_1, r_2, r_3 найдутся два одинаковых, т. е. какие-нибудь два из чисел a^2, b^2, c^2 имеют одинаковые остатки при делении на 9. Значит, хотя бы одна из разностей $a^2 - b^2, a^2 - c^2, b^2 - c^2$ делится на 9.

Упражнения

40. Число a дает остаток r_1 при делении на m , а число b дает остаток r_2 при делении на m . Можно ли утверждать, что число $a + b$ дает остаток $r_1 + r_2$ при делении на m , а число ab дает остаток $r_1 \cdot r_2$ при делении на m ? Как изменить формулировку, чтобы получилось верное утверждение?

41. Решите задачи № 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 с помощью доказанных в этом пункте теорем о сравнениях.

42. Докажите, что ни при каком натуральном n число $3n - 1$ не является точным квадратом.

43. Докажите, что ни при каком натуральном n числа $5n + 2$ и $5n - 2$ не являются точными квадратами.

44. Докажите, что ни при каком натуральном n числа $7n + 3, 7n - 1, 7n - 2$ не являются точными квадратами.

45. Докажите, что при любом целом $n \geq 0$ число $5^{2n+1} \times 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ делится на 19.

46. Дано натуральное число n . Докажите, что найдется число, записываемое только единицами и нулями, которое делится на n .

47. Докажите, что для любых натуральных n и k число $1^{2k-1} + 2^{2k-1} + \dots + (2n)^{2k-1}$ делится на $2n+1$.

48. Докажите, что число 100...001, в котором число нулей четное, делится на 11.

§ 7. Периодичность остатков при возведении в степень

Рассмотрим последовательные степени числа 2:

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, \dots$$

и найдем, какие остатки дают эти числа при делении на 5. Для нескольких первых чисел эти остатки легко найти:

$$2^1 = 2,$$

$$2^2 = 4,$$

$$2^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5},$$

$$2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Чтобы находить остатки дальше, нужно было бы вычислить дальнейшие значения степеней двойки: 2^5 , 2^6 , 2^7 и т. д. Числа эти быстро возрастают, и считать становится труднее. Но можно находить остатки и не вычисляя степеней двойки. Для этого можно воспользоваться теоремой 3 (стр. 16). Именно, умножая сравнение $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ на 2 получаем:

$$2^5 \equiv 2 \pmod{5}.$$

Умножая полученное сравнение опять на 2, находим:

$$2^6 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Еще раз умножив, получаем:

$$2^7 \equiv 4 \cdot 2 \equiv 3 \pmod{5},$$

затем

$$2^8 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{5}$$

и т. д. Таким способом можно быстро найти остатки от деления на 5 чисел вида 2^n (не вычисляя самих степеней).

Запишем то, что получается, в две строки, подписывая под каждой степенью ее остаток от деления на 5.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} & 2^{11} & 2^{12} & 2^{13} & \dots \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Сразу же видно, что остатки периодически повторяются: после четырех остатков 2, 4, 3, 1 снова повторяются в том же порядке эти остатки, затем снова и т. д.

Рассмотрим еще один пример: остатки от деления степеней тройки на 7. Мы имеем:

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3, \\ 3^2 &= 9 \equiv 2 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Умножая полученное сравнение $3^2 \equiv 2 \pmod{7}$ на 3, затем еще на 3 и т. д., получаем:

$$\begin{aligned} 3^3 &\equiv 6 \pmod{7}, \\ 3^4 &\equiv 6 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{7}, \\ 3^5 &\equiv 4 \cdot 3 \equiv 5 \pmod{7} \end{aligned}$$

и т. д. Если мы продолжим эти вычисления, мы получим следующие две строки (где под каждым числом подписан его остаток от деления на 7):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & 3^7 & 3^8 & 3^9 & 3^{10} & 3^{11} & 3^{12} & 3^{13} & \dots \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & \dots \end{array}$$

И здесь наблюдается периодическое чередование остатков: после каждых шести остатков все повторяется сначала.

Наконец, еще один пример: остатки от деления степеней двойки на 48. Производя вычисления таким же образом, получаем следующие две строки (где под каждым числом подписан его остаток при делении на 48):

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & \dots \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 16 & 32 & 16 & 32 & \dots \end{array}$$

И здесь остатки повторяются, но только не с самого начала: первые три остатка не повторяются, а затем идет периодическое повторение: 16, 32, 16, 32, ...

Естественно возникает предположение, что при любых натуральных a и m остатки от деления чисел a , a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , ... на m периодически повторяются (возможно, не с самого начала). Докажем, что это действительно так. Для этого возьмем первые $m+1$ степеней:

$$a, a^2, a^3, \dots, a^m, a^{m+1}$$

и рассмотрим их остатки при делении на m . Так как при делении на m может быть только m остатков (0, 1, 2, ..., $m-1$), а чисел у нас $m+1$, то найдутся среди них два числа, имеющие одинаковые остатки при делении на m . Пусть, например,

$$a^k \equiv a^{k+l} \pmod{m}$$

(где $l > 0$). Умножая на a^{n-k} , получаем: $a^n \equiv a^{n+l} \pmod{m}$ при $n \geq k$. Но это означает, что, начиная с a^k , остатки периодически повторяются (т. е. начиная с a^k идут l остатков, которые снова и снова повторяются).

Проведенное рассуждение показывает, что периодичность остатков начинается с того места, где впервые обнаруживаются два одинаковых остатка. А для того чтобы обнаружить два одинаковых остатка при делении на m , достаточно (каким бы ни было основание a) взять $m+1$ первых степеней числа a .

Особенно просто обнаружить периодическое повторение остатков, если найдется такой показатель l , что $a^l \equiv 1 \pmod{m}$. Умножая это сравнение на a^n , получаем: $a^{n+l} \equiv a^n \pmod{m}$ при любом натуральном n . Это означает, что с самого начала каждые l остатков периодически повторяются. Итак, если найдется такой показатель l , что $a^l \equiv 1 \pmod{m}$, то остатки от деления чисел $a, a^2, a^3, a^4, a^5, \dots$ на m периодически повторяются с периодом l .

Доказанные утверждения находят применение при решении ряда задач.

Пример 1. Найти остаток от деления числа 222^{555} на 7.

Решение. Так как $222 = 7 \cdot 31 + 5$, то $222 \equiv 5 \pmod{7}$, и потому $222^{555} \equiv 5^{555} \pmod{7}$. Теперь посмотрим, как повторяются остатки степеней пятерки при делении на 7. Мы находим: $5^2 = 25 \equiv 4 \pmod{7}$, $5^3 \equiv 4 \cdot 5 \equiv 6 \pmod{7}$, $5^4 \equiv 6 \cdot 5 \equiv 2 \pmod{7}$, $5^5 \equiv 2 \cdot 5 \equiv 3 \pmod{7}$, $5^6 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}$. Итак, $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Возводя в степень k , получаем: $5^{6k} \equiv 1 \pmod{7}$ при любом натуральном k . Но $555 = 6 \cdot 92 + 3$. Поэтому

$$5^{555} = 5^{6 \cdot 92 + 3} = 5^{6 \cdot 92} \cdot 5^3 \equiv 6 \pmod{7}.$$

Таким образом, число 222^{555} дает при делении на 7 остаток 6.

Пример 2. Делится ли число $222^{555} + 555^{222}$ на 7?

Решение. Мы уже видели в примере 1, что $222^{555} \equiv 6 \pmod{7}$. Далее, $555 = 7 \cdot 79 + 2$, т. е. $555 \equiv 2 \pmod{7}$, и потому $555^{222} \equiv 2^{222} \pmod{7}$. Теперь посмотрим, как повторяются остатки степеней двойки при делении на 7:

$$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Итак, $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Возводя в степень k , получаем: $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ при любом натуральном k . Так как 222 делится на 3, то $2^{222} \equiv 1 \pmod{7}$, и потому $555^{222} \equiv 1 \pmod{7}$.

Складывая полученные сравнения $222^{555} \equiv 6 \pmod{7}$, $555^{222} \equiv 1 \pmod{7}$, получаем: $222^{555} + 555^{222} \equiv 6 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$. Таким образом, число $222^{555} + 555^{222}$ делится на 7.

Упражнения

49. Найдите остаток от деления числа $7^{100} + 11^{100}$ на 13.
50. Найдите остаток от деления числа 6^{592} на 11.
51. Докажите, что число $11^{10} - 1$ делится на 100.
52. Какой цифрой оканчивается число 777^{777} ?
53. Делится ли число $7^{7^7} - 7^{7^7}$ на 10?
54. Какой цифрой оканчивается число $14^{14^{14}}$?
55. Докажите, что число $11^{10^{1967}} - 1$ делится на 10^{1968} .
56. Найдите наименьшее натуральное число, начинающееся с цифры 7 и уменьшающееся впятеро от перестановки этой цифры в конец.
57. Докажите, что число $2222^{5555} - 5555^{2222}$ делится на 7.

§ 8. Взаимно простые числа

Если число a делится на b , то говорят также, что b является делителем числа a . Например, числа 2 и -5 являются делителями числа 20; числа -6 и 8 являются делителями числа -24 .

Определение. Два числа называются взаимно простыми, если они не имеют никаких общих делителей, кроме 1 и -1 . Иначе говоря, два числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, кроме единицы.

Например, числа 8 и 15 взаимно просты. Действительно, число 8 не может делиться на числа, большие, чем оно само. Значит, натуральные делители числа 8 можно искать только среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Но на 3, 5, 6, 7 число 8 не делится. Остаются 1, 2, 4, 8 — они и являются натуральными делителями числа 8. Но число 15 на 2, 4 и 8 не делится. Значит, числа 8 и 15 имеют только один общий натуральный делитель — единицу, т. е. эти числа взаимно просты.

Числа 21 и 34 тоже взаимно просты. А вот числа 24 и 28 не являются взаимно простыми, так как они имеют общие натуральные делители, отличные от единицы (например, их общим делителем является число 2).

Мы докажем в этом пункте три важные теоремы о взаимно простых числах.

Теорема 1. *Если числа a и b взаимно просты, то существуют такие два целых числа x_0 и y_0 , что $ax_0 + by_0 = 1$.*

Доказательство. Будем рассматривать всевозможные целые числа, которые можно записать в виде $ax + by$ (где x и y — некоторые целые числа). Например, среди них будут числа $a = 1 \cdot a + 0 \cdot b$, $a - 2b$, $3a + 5b$ и т. п. Среди чисел вида $ax + by$ нам, конечно, встретятся натуральные числа. Например, если число a отрицательно, то число $-a = (-1)a + 0 \cdot b$ будет положительным, т. е. натуральным. (Заметим, что оба числа a и b не могут быть равны нулю, так как в противном случае они делятся на любое натуральное число, т. е. не являются взаимно простыми.)

Возьмем наименьшее натуральное число, которое можно записать в виде $ax + by$. Пусть это будет число $c = ax_0 + by_0$. Мы докажем, что $c = 1$, т. е. $ax_0 + by_0 = 1$, чем и будет установлена нужная теорема. Доказательство проведем от противного: мы предположим, что $c > 1$, и приведем это предположение к противоречию.

Разделим число a на c с остатком: $a = cq + r$, где $0 \leq r < c$. Если бы было $r \neq 0$ (т. е. если бы r было натуральным числом), то мы получили бы:

$$r = a - cq = a - (ax_0 + by_0)q = a(1 - x_0q) + b(-y_0q),$$

т. е. натуральное число r , меньшее, чем c , нам удалось представить в виде $ax + by$. Но это невозможно, так как c — наименьшее натуральное число такого вида.

Значит, $r=0$, так что $a=cq$. Иными словами, число a делится на c .

Совершенно так же мы докажем, что и b делится на c . Значит, числа a и b имеют общий делитель $c > 1$, а это противоречит тому, что числа a и b взаимно просты. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. Если число n делится на каждое из двух взаимно простых чисел a , b , то оно делится и на их произведение ab .

Доказательство. Так как число n делится на a , то $n=ka$, где k — некоторое целое число. Точно так же $n=lb$, где l — некоторое целое число. Далее, так как a и b взаимно просты, то по теореме 1 найдутся такие целые числа x_0 и y_0 , что $ax_0+by_0=1$. Умножив это равенство на l , мы получим: $l=lax_0+lby_0=lax_0+ny_0=$
 $=lax_0+kay_0=a(lx_0+ky_0)$. Отсюда мы находим: $n=bl=$
 $=ab(lx_0+ky_0)$, а это означает, что n делится на ab .

Проиллюстрируем доказанную теорему на простом примере. Число 24 делится на 3 и на 4. Так как 3 и 4 взаимно просты, то 24 должно делиться и на произведение $3 \cdot 4$. Действительно, 24 делится на 12. В доказанной теореме весьма существенно, что a и b взаимно просты. Например, 24 делится на 8 и на 12. Но на их произведение, т. е. на $8 \cdot 12=96$, число 24, конечно, не делится. Происходит это потому, что числа 8 и 12 не взаимно просты, так что теорема 2 неприменима.

Теорема 3. Если произведение ac делится на b и если числа a и b взаимно просты, то c делится на b .

Доказательство. Так как числа a и b взаимно просты, то по теореме 1 найдутся такие целые числа x_0 , y_0 , что $ax_0+by_0=1$. Умножим это равенство на c

$$c = acx_0 + bcy_0.$$

Произведение ac по условию делится на b ; значит, acx_0 делится на b . Число bcy_0 также, очевидно, делится на b . Итак, оба слагаемых в правой части равенства делятся на b , а потому и вся сумма делится на b , т. е. c делится на b .

Рассмотрим примеры применения теорем о взаимно простых числах к решению задач.

Пример 1. Рассмотрим снова пример 1 на стр. 12.

Мы докажем, что число $n^3 - n$ делится на 2, и отдельно докажем, что оно делится на 3. Так как 2 и 3

взаимно просты, то отсюда будет следовать (по теореме 2), что $n^3 - n$ делится на 6.

Если $n \equiv 0 \pmod{2}$, то $n^3 - n \equiv 0^3 - 0 \equiv 0 \pmod{2}$;

если $n \equiv 1 \pmod{2}$, то $n^3 - n \equiv 1^3 - 1 \equiv 0 \pmod{2}$.

Итак, в любом случае $n^3 - n \equiv 0 \pmod{2}$, т. е. число $n^3 - n$ делится на 2. Далее,

если $n \equiv 0 \pmod{3}$, то $n^3 - n \equiv 0^3 - 0 \equiv 0 \pmod{3}$;

если $n \equiv 1 \pmod{3}$, то $n^3 - n \equiv 1^3 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$;

если $n \equiv 2 \pmod{3}$, то $n^3 - n \equiv 2^3 - 2 \equiv 0 \pmod{3}$.

Итак, в любом случае $n^3 - n \equiv 0 \pmod{3}$, т. е. $n^3 - n$ делится на 3.

Пример 2. Существует ли такое натуральное n , что число

$$\underbrace{111 \dots 11}_{n \text{ цифр}}$$

делится на 217?

Решение. Рассмотрим числа

$$1, 11, 111, 1111, \dots, \underbrace{111 \dots 11}_{218 \text{ цифр}}.$$

Каждое из них имеет какой-то остаток от деления на 217. Так как остатков от деления на 217 имеется 217 (т. е. 0, 1, 2, ..., 216), а чисел у нас 218, то найдутся среди них два числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 217. Пусть, например,

$$\underbrace{111 \dots 11}_k \text{ цифр} \equiv \underbrace{111 \dots 11}_{k+l \text{ цифр}} \pmod{217}.$$

Тогда разность этих чисел делится на 217. Подписав первое число под вторым и произведя вычитание «в столбик», мы увидим, что разность этих чисел имеет вид:

$$\underbrace{111 \dots 11000 \dots 00}_l \text{ цифр} \quad \underbrace{\dots 11}_{k \text{ цифр}},$$

т. е. эта разность равна $10^k \cdot \underbrace{111 \dots 11}_l$. По доказанному это

число делится на 217. Остается применить теорему 3: так как числа 10^k и 217 взаимно просты, то число $\underbrace{111 \dots 11}_l$

должно делиться на 217. Мы видим, что ответ на постав-

ленный вопрос утвердителен. Можно даже утверждать, что существует число, записываемое не более чем 217 единицами и делящееся на 217.

Упражнения

58. Докажите, что числа n и $n+1$ взаимно просты.
59. Докажите, что при любом натуральном n число $2^n + 2^{n+1}$ делится на 6.
60. Докажите, что при любых натуральных a и n число $a^n + a^{n+1}$ делится на $a(a+1)$.
61. Докажите, что при любом нечетном n число $n^3 - n$ делится на 24.
62. Докажите, что при любом целом n число $n^5 - n$ делится на 30.
63. Докажите, что при любом целом n число $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 24.
64. Докажите, что при любом целом n число $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 120.
65. Докажите, что при любом целом a число $a^6 - a^3$ делится на 60.
66. Докажите, что при любом нечетном n число $a^4 + 7(2a^2 + 7)$ делится на 64.
67. Докажите, что при любом целом a число $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1$ делится на 24.
68. Докажите, что при любом целом n число $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ делится на 24.
69. Докажите, что при любых целых a, b число $ab(a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)$ делится на 15.
70. Докажите, что при любом нечетном x число $x^3 + 3x^2 - x - 3$ делится на 48.
71. Докажите, что при любом целом n число $n(n^4 - 125n^2 + 4)$ делится на 120.
72. Докажите, что при любом целом n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.
73. Докажите, что при любом целом a число $a^3(a^6 - 1)$ делится на 504.
74. Докажите, что при любом нечетном n число $n^8 - n^6 - n^4 + n^2$ делится на 1152.
75. При любом ли целом a число $a(a^2 - 1)(a^2 - 4)$ делится на 720?
76. Докажите, что при любом целом n число $n^2(n^2 - 1)$ делится на 12.

77. Докажите, что при любом натуральном n число $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ делится на 14.

78. Докажите, что при любом целом n число $2n^6 - n^4 - n^2$ делится на 36.

79. Докажите, что при любом целом n число $6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$ делится на 30.

80. Докажите, что при любом целом n число $n(n^2 - 1) \times (n^2 - 5n + 6)$ делится на 120.

81. Докажите, что при любых целых x, y число $(x^2y^3 - 4x^2y)(x^4 + x^2 - 2)$ делится на 216.

82. Докажите, что при любом целом a число $a^7 - 5a^5 + 4a^3$ делится на 360. При каких a это число делится на 1080?

83. Докажите, что при любом четном n число $n^2(n^2 - 4) \times (n^2 - 16)$ делится на 23 040.

84. Дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима. Сократима ли дробь $\frac{a}{b}$?

85. Докажите, что если n и k — натуральные числа, причем k нечетно, то число $2(1^k + 2^k + \dots + n^k)$ делится на $n(n+1)$.

86. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 7 и дающее в остатке 1 при делении на 2, 3, 4, 5, 6.

87. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 дает остаток 2, при делении на 4 дает остаток 3, при делении на 5 дает остаток 4 и при делении на 6 дает остаток 5.

88. Докажите, что при любом $n \geq 0$ число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

89. Докажите, что если число $a^2 + b^2$ делится на 21, то оно делится и на 441.

90. Докажите, что ни при каком целом n число $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

91. Сколько существует таких пар натуральных чисел x, y , не превосходящих 1000, что число $x^2 + y^2$ делится на 49? При этом если $x \neq y$, то пары x, y и y, x считаются различными.

92. Числа a и m взаимно просты. Докажите, что если $ad - bc$ делится на m и $a - b$ делится на m , то и число $c - d$ делится на m .

93. Докажите, что если n взаимно просто с числом 6, то $n^2 - 1$ делится на 24.

94. Докажите, что числа $2n - 1$ и $2n + 1$ взаимно просты.

95. Докажите, что при любом целом n число $n(n^2 - 49) \times (n^2 + 49)$ делится на 30.

96. Докажите, что если a и b взаимно просты, то числа a^2 и b тоже взаимно просты.

97. Докажите, что если a и b взаимно просты, то при любых натуральных m и n числа a^m и b^n тоже взаимно просты.

98. Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то найдется натуральное m , для которого $a^m \equiv 1 \pmod{b}$.

99. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что для любого n найдется такое число x , что $ax + n$ делится на b .

100. Докажите, что при любых целых a, b число $ab(a^4 - b^4)$ делится на 30.

101. Докажите, что при любых целых a, b число $a^2b^2(a^4 - b^4)(a^4 - 1)$ делится на 900.

102. Найдите такое y , что число $(y^2 + 1)x^3 + (y^3 - 1)x$ при любом целом x делится на 6.

103. Существует ли такое натуральное m , что если число a не делится на 7, то $a^m \equiv 1 \pmod{7}$?

104. Докажите, что числа $2^p - 1$ и $2^q - 1$ в том и только в том случае взаимно просты, если взаимно просты числа p и q (числа p и q натуральные).

§ 9. Признаки делимости

Вы, конечно, знаете, как определить, делится ли некоторое натуральное число на 10:

для того чтобы некоторое натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра этого числа была равна нулю.

Это признак делимости на 10. Например, число 257 630 делится на 10, а число 38 461 не делится. Хорошо известны также признаки делимости на 2 и на 5:

для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя его цифра была четной;

для того чтобы число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра была 0 или 5.

Похожим образом формулируются признаки делимости на 100, на 4, на 25. Несколько менее известны признаки делимости на 3 и на 9:

для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3;

для того чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

А можно ли придумать признак делимости на 11 или на 17 и как доказать сформулированные выше признаки делимости (например, признак делимости на 3)? Постараемся ответить на эти вопросы. Но прежде условимся о способе записи чисел. Если нас попросят написать шестизначное число, первая цифра которого 5, вторая 9, третья 8, четвертая 1, пятая 6 и шестая 2, то мы сразу напишем: 598162. Но как быть, если нам предложат написать шестизначное число, первая цифра которого a , вторая b , третья c , четвертая d , пятая e и шестая f . Написать $abcdef$ нельзя — это будет обозначать произведение: $abcdef = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$. Поэтому, чтобы записать число, цифры которого обозначены буквами, мы условимся проводить над этими буквами черту. Таким образом, \overline{abcdef} будет обозначать число, имеющее f единиц, e десятков, d сотен и т. д:

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f.$$

Теперь докажем сформулированный выше признак делимости на 3. Для примера мы будем рассматривать шестизначное число \overline{abcdef} , но рассуждение имеет общий характер. Мы имеем:

$$10 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Возводя это сравнение в квадрат, куб и т. д., получаем:

$$10^2 \equiv 1 \pmod{3}; 10^3 \equiv 1 \pmod{3}; 10^4 \equiv 1 \pmod{3}; 10^5 \equiv 1 \pmod{3}; \dots \text{ Следовательно,}$$

$$a \cdot 10^5 \equiv a \pmod{3}; b \cdot 10^4 \equiv b \pmod{3}; c \cdot 10^3 \equiv c \pmod{3}; d \cdot 10^2 \equiv d \pmod{3}; e \cdot 10 \equiv e \pmod{3}; f \equiv f \pmod{3}.$$

Складывая почленно все эти сравнения, получаем:

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \equiv a + b + c + d + e + f \pmod{3},$$

или иначе:

$$\overline{abcdef} \equiv a + b + c + d + e + f \pmod{3}.$$

Мы доказали таким образом, что натуральное число имеет тот же остаток от деления на 3, что и сумма его цифр. Из этого и вытекает сформулированный выше признак делимости на 3.

Например,

$$598\,162 \equiv 5 + 9 + 8 + 1 + 6 + 2 = 31 \equiv 3 + 1 \equiv 1 \pmod{3},$$

т. е. число 598 162 дает остаток 1 при делении на 3, так что это число на 3 не делится.

Совершенно так же доказывается признак делимости на 9: так как $10 \equiv 1 \pmod{9}$, то, рассуждая таким же образом, получим:

$$\overline{abcdef} \equiv a + b + c + d + e + f \pmod{9}.$$

Например,

$$754\,289 \equiv 7 + 5 + 4 + 2 + 8 + 9 \equiv 35 \equiv 3 + 5 \equiv 8 \pmod{9},$$

т. е. число 754 289 дает при делении на 9 остаток 8.

А теперь попытаемся таким же способом получить признак делимости на 11. Для этого заметим, что

$$10 \equiv -1 \pmod{11}.$$

Возводя это сравнение в квадрат, куб и т. д., получим:

$$10^2 \equiv 1 \pmod{11},$$

$$10^3 \equiv -1 \pmod{11},$$

$$10^4 \equiv 1 \pmod{11},$$

$$10^5 \equiv -1 \pmod{11} \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$a \cdot 10^5 \equiv -a \pmod{11}; \quad b \cdot 10^4 \equiv b \pmod{11};$$

$$c \cdot 10^3 \equiv -c \pmod{11}; \quad d \cdot 10^2 \equiv d \pmod{11};$$

$$e \cdot 10 \equiv -e \pmod{11}; \quad f \equiv f \pmod{11}.$$

Складывая почленно все эти сравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \overline{abcdef} &\equiv -a + b - c + d - e + f \equiv \\ &\equiv (b + d + f) - (a + c + e) \pmod{11}. \end{aligned}$$

Мы доказали, что натуральное число имеет тот же остаток от деления на 11, что и разность между суммой цифр этого числа, стоящих на нечетных местах (считая справа), и суммой цифр, стоящих на четных местах.

Отсюда вытекает признак делимости на 11:

для того чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой его цифр,

стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11.

Например,

$$542\,379 \equiv (4 + 3 + 9) - (5 + 2 + 7) \equiv 2 \pmod{11},$$

$$61\,391 \equiv (6 + 3 + 1) - (1 + 9) \equiv 0 \pmod{11},$$

значит, первое число не делится на 11 (оно дает остаток 2 при делении на 11), а второе делится на 11.

Таким же способом можно получить признак делимости на 7.

Мы имеем:

$$10 \equiv 3 \pmod{7}; \quad 10^2 \equiv 10 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7};$$

$$10^3 \equiv 10 \cdot 2 \equiv -1 \pmod{7}; \quad 10^4 \equiv 10 \cdot (-1) \equiv -3 \pmod{7};$$

$$10^5 \equiv 10 \cdot (-3) \equiv -2 \pmod{7}; \quad 10^6 \equiv 10 \cdot (-2) \equiv 1 \pmod{7}.$$

Так как $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$, то дальше все будет повторяться. В результате мы получаем следующие две строки чисел, причем под каждой степенью десяти подписано число, сравнимое с ней по модулю 7 (т. е. дающее тот же остаток при делении на 7):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & 10^{18} & 10^{17} & 10^{16} & 10^{15} & 10^{14} & 10^{13} & 10^{12} & 10^{11} & 10^{10} & 10^9 & 10^8 & 10^7 & 10^6 & 10^5 & 10^4 & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \\ \dots & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Отсюда мы получаем (взяв для примера шестизначное число \overline{abcdef}):

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f \equiv (-2)a + (-3)b + (-1)c + 2d + 3e + f \pmod{7}.$$

В результате мы получаем следующее правило:

чтобы узнать остаток от деления натурального числа на 7, нужно справа налево подписать под цифрами этого числа коэффициенты:

$$\dots -1, 2, 3, 1, -2, -3, -1, 2, 3, 1,$$

затем умножить каждую цифру на стоящий под ней коэффициент и полученные произведения сложить; найденная сумма будет иметь тот же остаток от деления на 7, что и взятое число.

Возьмем для примера число 4136. Действуя, как указано в правиле, мы находим:

$$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \\ -1, 2, 3, 1 \\ \hline -4, 2, 9, 6 \\ (-4) + 2 + 9 + 6 = 13. \end{array}$$

Таким образом, $4136 \equiv 13 \equiv 6 \pmod{7}$.

Еще один пример: возьмем число 8 546 216.

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 1 \quad 6 \\ 1, -2, -3, -1, 2, 3, 1 \\ \hline 8, -10, -12, -6, 4, 3, 6 \\ 8 + (-10) + (-12) + (-6) + 4 + 3 + 6 = -7. \end{array}$$

Таким образом, $8\,546\,216 \equiv -7 \equiv 0 \pmod{7}$, т. е. число 8 546 216 делится на 7.

Этим способом можно найти признак делимости на любое число m . Надо только найти, какие коэффициенты следует подписывать под цифрами взятого числа. А для этого нужно каждую степень десяти 10^k заменить по возможности меньшим числом (положительным или отрицательным), имеющим тот же остаток при делении на m , что и число 10^k . При $m=3$ или $m=9$ эти коэффициенты получились очень простые: все они равны единице. Поэтому и признак делимости на 3 или на 9 получился очень простой. При $m=11$ коэффициенты тоже были несложные: они попеременно равны $+1$ и -1 . А при $m=7$ коэффициенты получились посложнее; поэтому и признак делимости на 7 получился более сложный.

Заметим еще, что иногда признак делимости можно получить проще. Пусть, например, нужно определить, делится ли некоторое число на 15. Конечно, можно, как указано выше, найти коэффициенты, подписать их и составить сумму произведений цифр на эти коэффициенты. Но можно поступить проще. Ведь если число делится на 15, то оно делится на 3 и на 5. Наоборот, если число делится на 3 и на 5, то по теореме 2 на стр. 24 оно делится на 15. Значит,

для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3, т. е. чтобы оно оканчивалось нулем или пятеркой и, кроме того, сумма его цифр делилась на 3.

Аналогично

для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3, т. е. чтобы его последняя цифра была четной и, кроме того, сумма его цифр делилась на 3.

Таким же способом можно получить признаки делимости на 18, 45 и другие числа.

Упражнения

105. Выведите признак делимости на 4.

106. Выведите признак делимости на 8.

107. Выведите признак делимости на 16.

108. Выведите признак делимости на 25.

109. Выведите признак делимости на 13.

110. Выведите признак делимости на 37.

111. Сформулируйте признак делимости на 50.

112. Сформулируйте признак делимости на 12.

113. Сформулируйте признак делимости на 18.

114. Сформулируйте признак делимости на 14.

115. К некоторому трехзначному числу приписано такое же число. Докажите, что полученное шестизначное число делится на 7, на 11 и на 13. Что получится, если это шестизначное число разделить на 7, потом результат разделить на 11 и полученный результат разделить на 13?

116. Докажите, что если число $a+4b$ делится на 13 (где a и b — целые), то и число $10a+b$ делится на 13. Верно ли обратное?

117. Докажите, что если число $3a+2b$ делится на 17 (где a и b — целые), то и число $10a+b$ делится на 17. Верно ли обратное?

118. С помощью признака делимости на 3 установили, что число делится на 3. Далее, с помощью признака делимости на 9 установили, что это же число делится на 9. Можно ли утверждать, что это число делится на 27?

§ 10. Признаки делимости, связанные с разбиением цифр числа на группы

Число 268 513 можно записать следующим образом:

$$268\,513 = 2 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3.$$

В этой записи каждая цифра множится на соответствующую степень десяти. Если же мысленно разбить цифры

числа (начиная справа) на группы, по две в каждой группе, то число запишется по-другому. Например:

$$268\,513 = 26 \cdot 100^3 + 85 \cdot 100 + 13, \quad 3\,785\,493 = 3 \cdot 100^3 + \\ + 78 \cdot 100^2 + 54 \cdot 100 + 93.$$

Для произвольного шестизначного числа мы можем написать:

$$\overline{abcdef} = \overline{ab} \cdot 100^2 + \overline{cd} \cdot 100 + \overline{ef}.$$

Иначе говоря, в этом случае число выражается через степени числа 100, а коэффициентами при этих степенях служат двузначные числа. Такой записью чисел тоже можно пользоваться для вывода признаков делимости.

Выведем таким путем новый признак делимости на 11. Мы имеем

$$100 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Возводя в квадрат, куб и т. д., получаем

$$100^2 \equiv 1 \pmod{11}; \quad 100^3 \equiv 1 \pmod{11} \text{ и т. д.}$$

Значит,

$$\overline{ab} \cdot 100^2 \equiv \overline{ab} \pmod{11}; \quad \overline{cd} \cdot 100 \equiv \overline{cd} \pmod{11}; \quad \overline{ef} \equiv \overline{ef} \pmod{11}.$$

Складывая эти сравнения, получаем

$$\overline{abcdef} = \overline{ab} \cdot 100^2 + \overline{cd} \cdot 100 + \overline{ef} \equiv \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} \pmod{11}.$$

Мы получили следующее правило:

для того чтобы определить остаток от деления натурального числа на 11, можно поступить следующим образом: разбить цифры числа на группы (начиная справа) по две цифры в каждой; сумма полученных двузначных чисел имеет тот же остаток от деления на 11, что и взятое число.

Например:

$$268\,513 \equiv 26 + 85 + 13 \equiv 124 \equiv 1 + 24 \equiv 3 \pmod{11}, \\ 3\,785\,493 \equiv 3 + 78 + 54 + 93 \equiv 228 \equiv 2 + 28 \equiv 8 \pmod{11}.$$

Можно также разбивать цифры числа на группы по три цифры в каждой. Тогда число будет выражено через

степени числа 1000. Например:

$$3\,658\,941 = 3 \cdot 1000^3 + 658 \cdot 1000 + 941.$$

Таким способом можно также получать различные признаки делимости. Например, мы имеем:

$$1000 \equiv -1 \pmod{7}; 1000^2 \equiv 1 \pmod{7}; 1000^3 \equiv -1 \pmod{7}; \\ 1000^4 \equiv 1 \pmod{7} \text{ и т. д.}$$

Поэтому мы можем сформулировать следующий признак делимости на 7:

разобьем цифры числа на группы, по три цифры в каждой, считая справа, затем сложим трехзначные числа, стоящие в группах с нечетными номерами (считая справа), и от этой суммы вычтем сумму трехзначных чисел, стоящих в группах с четными номерами; полученная разность имеет тот же остаток от деления на 7, что и взятое число.

Например,

$$53\,012\,869\,745\,012\,811 \equiv (012 + 745 + 811) - \\ - (53 + 869 + 012) \equiv 634 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Упражнения

119. Докажите, что точно так же, как признак делимости на 7, формулируются признаки делимости на 11 и на 13.

120. Выведите признак делимости на 101.

121. Следующее предложение назовем «позиционным признаком делимости на m »: разобьем цифры произвольного числа на группы по l цифр в каждой (считая справа) и сложим все полученные l -значные числа; взятое число в том и только в том случае делится на m , если эта сумма l -значных чисел делится на m .

Докажите, что если m взаимно просто с числом 10, то найдется число l , для которого справедлив позиционный признак делимости на m .

122. Какое надо взять l , чтобы был справедлив позиционный признак делимости на 7 (см. упражнение 121)? Сформулируйте этот признак.

123. Сформулируйте и докажите позиционные признаки делимости (см. упражнение 121) на 11 и на 13.

124. Сформулируйте и докажите позиционный признак делимости на 37.

125. Сформулируйте и докажите позиционный признак делимости на 101.

126. Рассмотрим следующий способ проверки вычислений.

Пусть произведено сложение

$$4839 + 8947 + 9454 = 23\,340.$$

Для проверки правильности вычислений заменим каждое из слагаемых и предполагаемую сумму их остатками от деления на 9:

$$4839 \equiv 4 + 8 + 3 + 9 \equiv 6 \pmod{9},$$

$$8947 \equiv 8 + 9 + 4 + 7 \equiv 1 \pmod{9},$$

$$9454 \equiv 9 + 4 + 5 + 4 \equiv 4 \pmod{9},$$

$$23\,340 \equiv 2 + 3 + 3 + 4 + 0 \equiv 3 \pmod{9}.$$

Теперь вместо проверяемого примера напомним сравнение, взяв найденные остатки:

$$6 + 1 + 4 \equiv 3 \pmod{9}.$$

Это сравнение неверно; значит, и первоначальный пример на сложение выполнен неверно.

Обоснован ли такой способ проверки? Иначе говоря, если полученное сравнение оказалось неверным, можно ли утверждать, что и первоначальный пример решен неверно? Можно ли утверждать, что первоначальный пример решен верно, если получилось верное сравнение?

127. Можно ли применять способ проверки, описанный в упражнении 126, используя не признак делимости на 9, а какой-либо другой признак?

128. Можно ли применять способ проверки, описанный в упражнениях 126—127, не к сложению, а к умножению? К сложному вычислению, в котором участвуют сложение, вычитание, умножение?

129. Произведено сложение целых чисел (или более сложное действие, включающее сложения, вычитания, умножения), причем в результате получается некоторое четырехзначное число. Произведена проверка по способу, указанному в упражнениях 126—128, причем при применении признаков делимости на 4, 5, 7, 9 и 11 ошибки обнаружить не удалось. Можно ли утверждать, что результат первоначального вычисления верен?

§ 11. Наибольший общий делитель

Каждое отличное от нуля целое число имеет лишь конечное число делителей. Ясно, что если a является делителем числа m , то $-a$ тоже является делителем числа m . Поэтому мы будем говорить только о натуральных делителях числа m . Наименьшим натуральным делителем числа m является единица, наибольшим — число $|m|$.

Два числа m, n , хотя бы одно из которых отлично от нуля, имеют конечное число общих делителей. Наименьшим общим натуральным делителем чисел m, n является единица. Наибольший общий делитель чисел m и n обозначается через (m, n) . Если $(m, n) = 1$, т. е. если числа m и n не имеют других общих натуральных делителей, кроме 1, то числа m и n , как мы уже знаем, называются взаимно простыми.

Например, числа 36 и 24 имеют 6 общих натуральных делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Наибольшим общим делителем этих чисел является 12, т. е. $(36, 24) = 12$.

Теорема 1. Пусть m и n — два целых числа, хотя бы одно из которых отлично от нуля, и $d = (m, n)$ — их наибольший общий делитель. Тогда существуют такие целые числа x_0 и y_0 , что $mx_0 + ny_0 = d$.

Доказательство. Так как d является делителем числа m , то $m = ad$. Точно так же $n = bd$. Легко понять, что числа a и b взаимно просты. В самом деле, если бы a и b имели общий делитель $c > 1$, то мы имели бы $a = kc$, $b = lc$, и потому $m = kcd$, $n = lcd$. Тогда число cd было бы общим делителем чисел m и n , причем $cd > d$ (поскольку $c > 1$). Но это противоречит тому, что d — наибольший общий делитель чисел m и n .

Итак, числа a и b взаимно просты. По теореме 1 на стр. 23 найдутся такие целые числа x_0 и y_0 , что $ax_0 + by_0 = 1$. Умножив это равенство на d , мы получим $adx_0 + bdy_0 = d$, т. е. $mx_0 + ny_0 = d$.

Теорема 2. Пусть m и n — два целых числа, хотя бы одно из которых отлично от нуля, и $d = (m, n)$ — их наибольший общий делитель. Число s в том и только в том случае является общим делителем чисел m и n , если оно является делителем числа d .

Доказательство. Пусть s — общий делитель чисел m и n , т. е. каждое из чисел m, n делится на s . Так как

$d = mx_0 + ny_0$, то d делится на c , т. е. c является делителем числа d .

Обратно, пусть c — некоторый делитель числа d , т. е. d делится на c . Так как $m = ad$, то m делится на c (следствие 3 на стр. 7). Аналогично n делится на c . Значит, c — общий делитель чисел m и n .

В доказанных двух теоремах отмечаются некоторые свойства наибольшего общего делителя. Но как находить наибольший общий делитель двух чисел? Например, каков наибольший общий делитель чисел 588 и 1960? Вопрос о нахождении наибольшего общего делителя двух чисел очень важен, например, для сокращения дробей. Чтобы сократить дробь $\frac{588}{1960}$, нужно разделить и числитель и знаменатель на их общий делитель. Но если мы разделим на какой-то делитель, не являющийся наибольшим, то полученная дробь все еще будет сократимой. Чтобы сразу получить несократимую дробь, нужно разделить числитель и знаменатель на их наибольший общий делитель.

Итак, как находить наибольший общий делитель двух чисел? Легко видеть, что наибольший общий делитель чисел m, n равен наибольшему общему делителю чисел $-m, n$, т. е. $(m, n) = (-m, n)$. Точно так же $(m, n) = (m, -n)$. Пользуясь этим замечанием, мы можем считать, что числа, наибольший общий делитель которых нам нужно найти, положительны, т. е. являются натуральными числами.

Существует довольно простой прием, позволяющий находить наибольший общий делитель двух натуральных чисел. Этот прием называется алгоритмом Евклида. Имя Евклида впервые встретилось вам при изучении геометрии. Но этот великий ученый, живший около 2000 лет назад, занимался не только геометрией. Ему принадлежит решение ряда важных задач арифметики и, в частности, тот способ нахождения наибольшего общего делителя, о котором мы хотим рассказать.

Прежде чем разъяснить, в чем состоит алгоритм Евклида, мы докажем одну лемму.

Лемма. Пусть a и b — натуральные числа и r — остаток от деления a на b . Тогда наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел b и r , т. е. $(a, b) = (b, r)$.

Доказательство. Так как r — остаток от деления a на b , то мы можем написать: $a = bq + r$, где q — некоторое целое число. Пусть c — некоторый общий делитель чисел a и b . Так как $r = a - bq$, то r тоже делится на c , т. е. c является общим делителем чисел b и r . Обратно, пусть c' — некоторый общий делитель чисел b и r . Тогда число $a = bq + r$ тоже делится на c' , т. е. c' является общим делителем чисел a и b . Таким образом, числа a и b имеют те же общие делители, что и числа b и r . Значит, наибольший общий делитель чисел a и b совпадает с наибольшим общим делителем чисел b и r .

Доказанная лемма и служит основой алгоритма Евклида. Для пояснения мы рассмотрим следующий пример.

Пример. Найти $(645, 381)$.

Решение. Разделим (с остатком) 645 на 381. Мы получим:

$$645 = 381 \cdot 1 + 264.$$

По доказанной лемме $(645, 381) = (381, 264)$. Значит, надо найти $(381, 264)$; мы замечаем, что числа стали немного поменьше. Разделим (с остатком) 381 на 264. Мы получим:

$$381 = 264 \cdot 1 + 117.$$

По лемме $(381, 264) = (264, 117)$. Значит, $(645, 381) = (264, 117)$, так что остается найти $(264, 117)$. Мы видим, что числа стали еще меньше. Разделим (с остатком) 264 на 117. Мы получим:

$$264 = 117 \cdot 2 + 30.$$

По лемме $(264, 117) = (117, 30)$. Значит, $(645, 381) = (117, 30)$, и остается найти $(117, 30)$. Разделим (с остатком) 117 на 30. Мы получим:

$$117 = 30 \cdot 3 + 27.$$

По лемме $(117, 30) = (30, 27)$. Значит, $(645, 381) = (30, 27)$. Далее,

$$30 = 27 \cdot 1 + 3.$$

По лемме $(30, 27) = (27, 3)$. Значит, $(645, 381) = (27, 3)$. Далее,

$$27 = 3 \cdot 9 + 0,$$

т. е. 27 делится на 3. Значит, наибольший общий делитель чисел 27 и 3 равен 3, т. е. $(27, 3) = 3$. Таким образом, $(645, 381) = 3$, т. е. требуемый наибольший общий делитель найден.

Прием разыскания наибольшего общего делителя, примененный в этом примере, и представляет собой алгоритм Евклида. В общем случае этот прием можно описать следующим образом. Даны два натуральных числа a, b , причем $a > b$. Разделив a на b с остатком, получим:

$$a = q_1 b + r_1.$$

Теперь, разделив b на r_1 с остатком, получим:

$$b = q_2 r_1 + r_2.$$

Разделив далее r_1 на r_2 с остатком, найдем:

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3$$

и т. д. В результате мы получим убывающую последовательность натуральных чисел $a > b > r_1 > r_2 > r_3 \dots$. Но натуральных чисел, меньших, чем a , имеется лишь конечное число. Поэтому на каком-то шаге эта последовательность убывающих чисел оборвется, т. е. какое-то r_{k-1} разделился на r_k без остатка. Следовательно, r_k и будет наибольшим общим делителем чисел r_{k-1} и r_k , т. е. $(r_{k-1}, r_k) = r_k$. Но в силу доказанной леммы мы имеем:

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = \dots = (r_{k-1}, r_k).$$

Значит, $(a, b) = (r_{k-1}, r_k) = r_k$. Таким образом, если мы будем шаг за шагом проводить указанным способом деление с остатком, то последний отличный от нуля остаток и будет наибольшим общим делителем чисел a и b .

Упражнения

130. Найдите с помощью алгоритма Евклида (846, 246).
131. Найдите с помощью алгоритма Евклида (1960, 588).
132. Найдите с помощью алгоритма Евклида (15 283, 10 013).
133. Сократите дробь: $\frac{21\ 120}{30\ 720}, \frac{9\ 061}{10\ 127}, \frac{377}{261}, \frac{4\ 853}{5\ 697}$.
134. Докажите, что $(a, b) = (a, a + b)$.
135. Докажите, что $(a, b) = (a, a - b)$.

136. Докажите, что $(2n, 2n+2) = 2$ при любом целом n .
137. Докажите, что $(a, b) = (5a+3b, 13a+8b)$.
138. Докажите, что если a и b взаимно просты, то $(ac, b) = (c, b)$.
139. Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то число $(11a+2b, 18a+5b)$ равно либо 1, либо 19.
140. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $7^{n+2} + 8^{2n+1}$, где $n \geq 0$.
141. Докажите, что если ни одно из чисел $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ не делится на n (где n — натуральное число), то $(d, n) \neq 1$.
142. Докажите, что если $(a, b) = 1$, то $(ab, a+b) = 1$.
143. Докажите, что если $(a, b) = 1$, то $(ab, a-b) = 1$.
144. Докажите, что при любом натуральном n числа $\frac{n(n+1)}{2}$ и $2n+1$ взаимно просты.
145. Докажите, что наибольший общий делитель трех отличных от нуля чисел a, b, c равен $((a, b), c)$.
146. Докажите, что наибольший общий делитель n отличных от нуля чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ равен (d_{n-1}, a_n) , где d_{n-1} — наибольший общий делитель чисел a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .
147. Докажите, что если каждое из двух натуральных чисел a, b делится на c , то и их наибольший общий делитель (a, b) делится на c .

§ 12. Наименьшее общее кратное

Если число a делится на b , то число a называется *кратным* числа b . У каждого (отличного от нуля) числа b имеется бесконечно много кратных: все числа

$\dots, -5b, -4b, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, 4b, 5b, \dots$

являются кратными числа b .

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только натуральных чисел. Для любых двух натуральных чисел a, b можно найти натуральное число, являющееся их общим кратным. Например, общим кратным чисел a и b будет их произведение ab : оно, очевидно, делится и на a , и на b . Бывает, что у чисел a, b имеются общие кратные, меньшие, чем произведение ab . Например, произведение чисел 18 и 24 равно 432. Но у чисел 18 и 24 имеются

общие кратные, меньшие, чем 432; например, общими кратными чисел 18 и 24 являются числа 72, 144, 216.

Наименьшее натуральное число, являющееся общим кратным чисел a и b , называется *наименьшим общим кратным* чисел a и b и обозначается через $[a, b]$. Например, наименьшим общим кратным чисел 18 и 24 является число 72, т. е. $[18, 24] = 72$.

Наименьшее общее кратное мы используем при приведении дробей к общему знаменателю (а также при сложении и вычитании дробей); наименьшее общее кратное всех знаменателей представляет собой наименьший общий знаменатель, к которому могут быть приведены рассматриваемые дроби.

Теорема. Для любых двух натуральных чисел a , b произведение их наибольшего общего делителя на их наименьшее общее кратное равно произведению самих чисел

$$(a, b) \cdot [a, b] = ab.$$

Доказательство. Обозначим наибольший общий делитель чисел a и b через d :

$$d = (a, b).$$

Тогда $a = kd$, $b = ld$, где k и l — взаимно простые числа (см. доказательство теоремы 1 на стр. 37). Пусть теперь n — некоторое общее кратное чисел a и b . Так как n делится на a и на b , то $n = ua$ и $n = vb$, где u , v — некоторые натуральные числа. Таким образом, $n = ukd$, $n = vld$, откуда находим:

$$\frac{n}{d} = uk, \quad \frac{n}{d} = vl.$$

Мы видим, что $\frac{n}{d}$ есть натуральное число, делящееся на k и на l . Так как k и l взаимно просты, то по теореме 2 на стр. 24 число $\frac{n}{d}$ делится на произведение kl , т. е.

$$\frac{n}{d} = ckl,$$

где c — некоторое натуральное число. Освобождаясь от знаменателя, получаем $n = ckld$. Итак, любое натуральное число n , являющееся общим кратным чисел a и b , имеет вид $n = ckld$, где c — некоторое натуральное число.

Так как $c \geq 1$, то любое общее кратное n чисел a и b удовлетворяет неравенству $n \geq kld$. Но число kld само

является общим кратным чисел a и b . В самом деле, $kld = l \cdot kd = la$, т. е. kld делится на a ; точно так же $kld = k \cdot ld = kb$, т. е. kld делится на b . Мы видим, что kld является наименьшим общим кратным чисел a и b :

$$[a, b] = kld.$$

Умножив это равенство на число $(a, b) = d$, мы получаем:

$$[a, b] \cdot (a, b) = kld \cdot d = kd \cdot ld = ab.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Наименьшее общее кратное двух натуральных чисел a, b можно находить по формуле

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

Следствие 2. Пусть a и b — два натуральных числа и $n_0 = [a, b]$ — их наименьшее общее кратное. Натуральное число n в том и только в том случае является общим кратным чисел a и b , если оно является кратным числа n_0 .

В самом деле, как мы видели при доказательстве теоремы, $n = ckld$, где c — натуральное число. Но $n_0 = [a, b] = kld$. Значит, $n = cn_0$, т. е. n является кратным числа n_0 .

Пример. Найти наименьшее общее кратное чисел 645 и 381.

Решение. На стр. 39 — 40 мы с помощью алгоритма Евклида нашли наибольший общий делитель рассматриваемых чисел: $(645, 381) = 3$. Применяя следствие 1, получаем:

$$[645, 381] = \frac{645 \cdot 381}{(645, 381)} = \frac{645 \cdot 381}{3} = 215 \cdot 381 = 81\,915.$$

Вообще, для любых двух натуральных чисел a и b мы можем с помощью алгоритма Евклида найти их наибольший общий делитель (a, b) , а затем, применяя следствие 1, найти их наименьшее общее кратное $[a, b]$.

Упражнения

148. Найдите $[846, 246]$.

149. Найдите $[1960, 588]$.

150. Приведите дроби $\frac{111}{21120}$ и $\frac{1237}{30720}$ к общему знаменателю.

151. Сложите дроби $\frac{7}{192}$ и $\frac{187}{1620}$.

152. Делится ли $[a, b]$ на (a, b) ?

153. Докажите, что наименьшее общее кратное трех натуральных чисел a, b, c равно $[[a, b], c]$.

154. Докажите, что если число c делится на каждое из двух натуральных чисел a, b , то c делится и на их наименьшее общее кратное $[a, b]$.

155. Чему может быть равно наименьшее общее кратное трех чисел $n, n+1, n+2$ (где n — натуральное число)?

156. Докажите, что наименьшее общее кратное m натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$ равно $[n_{m-1}, a_m]$, где n_{m-1} — наименьшее общее кратное чисел a_1, a_2, \dots, a_{m-1} .

157. Докажите, что наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ совпадает с наименьшим общим кратным чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$.

§ 13. Простые числа

Определение. Натуральное число $p > 1$ называется простым, если, кроме 1 и p , оно не имеет других натуральных делителей. Натуральное число, большее единицы, имеющее больше двух натуральных делителей, называется составным числом.

Число 1 имеет только один натуральный делитель; оно не является ни простым, ни составным числом.

В первых двух десятках простыми являются числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Остальные числа первых двух десятков (кроме единицы) составные. Например, 15 имеет, кроме 1 и 15, делители 3 и 5, т. е. это число имеет четыре делителя, и потому является составным.

Для небольшого натурального числа нетрудно определить, простое оно или составное. Но если взять число побольше (скажем 101 или 377), то с первого взгляда уже нелегко определить, простое оно или составное. Возьмем для примера число 101. Кажется, нужно проделать 99 проб, чтобы узнать, простое ли оно: нужно проверить, делится ли оно на 2, на 3, на 4, ..., на 100. Но в действительности, как мы сейчас увидим, число проб, которые нужно проделать, значительно меньше.

На 2 число 101 не делится (так как последняя цифра этого числа нечетная). Но тогда число 101 не делится и ни на одно число вида $2k$ (т. е. на четное число). Значит, из списка чисел, на которые могло бы делиться 101, можно вычеркнуть все четные числа:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, 14, ..., ~~96~~, 97,
~~98~~, 99, ~~100~~.

Здесь число 2 подчеркнуто (мы производили пробу: не делится ли 101 на 2), а остальные четные числа вычеркнуты.

Первым из оставшихся является число 3. Применяя признак делимости на 3, находим, что число 101 на 3 не делится. Значит, оно не делится ни на одно число, кратное трем, т. е. числа, кратные трем, можно также из списка вычеркнуть:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, 14, ..., ~~96~~, 97,
~~98~~, ~~99~~, ~~100~~.

Итак, мы произвели только две пробы (проверили, делится ли 101 на 2 и на 3), а из нашего списка вычеркнуто довольно много чисел. Первым из оставшихся является число 5. На 5 число 101 не делится (так как его последняя цифра отлична от 0 и 5). Значит, из списка можно вычеркнуть все числа, кратные 5 (например, 25 и 35). Следующим оставшимся числом является 7. Применяя признак делимости на 7 (стр. 31), мы находим, что и на 7 число 101 не делится.

Итак, мы произвели 4 пробы: проверили, что число 101 не делится на 2, на 3, на 5, на 7. Теперь наш список выглядит следующим образом:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, 10, 11, ~~12~~, 13, 14, ..., ~~96~~, 97,
~~98~~, ~~99~~, ~~100~~.

Первым оставшимся числом является 11, затем 13, 17 и ряд других чисел. Но испытывать, делится ли число 101 на 11, 13, 17 и т. д., не следует, эти пробы были бы лишними. И без того мы уже можем сказать, что число 101 является простым.

В самом деле, если бы 101 делилось на 11, то результат деления обязательно был бы меньше, чем 11: ведь $11 \cdot 11 = 121$. Выходит, что 101 делилось бы на число, меньшее, чем 11, а это не так: мы уже видели, что 101 не делится ни на одно из чисел от 2 до 10. Значит, 101 на 11 не может делиться, т. е. проверка делимости на 11 была бы лишней. Тем более не нужно проверять, делится ли 101 на остальные числа: на 13, на 17 и т. д. В каждом случае результат деления должен был бы быть меньше 11, что невозможно. Мы видим, что число 101 не делится ни на одно из чисел нашего списка, т. е. оно не имеет никаких натуральных делителей, кроме 1 и 101. Иначе говоря, число 101 является простым.

Итак, чтобы убедиться, что число 101 простое, нам потребовалось только четыре пробы: убедиться, что 101 не делится на 2, на 3, на 5, на 7. Следующая проба (на 11) оказалась уже излишней. Но что это за числа: 2, 3, 5, 7, 11? Это простые числа, причем $11^2 = 121$ уже больше, чем 101, а квадраты чисел 2, 3, 5, 7 не превосходят числа 101.

На этом примере легко предугадать, что справедливо следующее общее утверждение:

Теорема. Если натуральное число p , большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, квадраты которых не превосходят p , то число p простое.

Прежде чем провести доказательство этой теоремы в общем случае, мы рассмотрим следующую лемму.

Лемма. Всякое натуральное число, большее единицы, имеет хотя бы один простой делитель.

Доказательство. Пусть a_1 — натуральное число, большее единицы. Если a_1 — простое число, то a_1 и есть простой делитель числа a_1 . Если же число a_1 не является простым, то найдется делитель a_2 числа a_1 , отличный от 1 и a_1 . Таким образом, $a_1 > a_2$. Если a_2 — простое число, то a_2 есть простой делитель числа a_1 . Если же число a_2

не является простым, то найдется делитель a_3 числа a_2 , отличный от 1 и a_2 . Таким образом, $a_1 > a_2 > a_3$, причем a_3 есть отличный от 1 делитель числа a_1 . Если a_3 — простое число, то a_3 есть простой делитель числа a_1 . Если же число a_3 не является простым, то найдется такой делитель a_4 (отличный от 1), что $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Каждый раз, если делитель не является простым, можно подобрать следующий, еще меньший делитель числа a_1 . Но так не может продолжаться бесконечно: ведь натуральных чисел, меньших a_1 , имеется лишь конечное множество. Поэтому в конце концов мы обязательно получим простой делитель числа a_1 .

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Если число p не является простым, то найдется делитель a числа p , отличный от 1 и p . Таким образом, $p = ab$. Будем считать для определенности, что $a \leq b$. Тогда $a^2 \leq ab$, т. е. $a^2 \leq p$. В силу леммы найдется простой делитель q числа a . Ясно, что q является делителем и числа p . При этом $q \leq a$, так что $q^2 \leq p$. Итак, если число p не является простым, то найдется простой делитель q числа p , квадрат которого не превосходит p . Отсюда и вытекает справедливость теоремы.

Упражнения

158. Определите, является ли число 353 простым.

159. Какие из чисел, заключенных между 2320 и 2350 являются простыми?

160. Какие из чисел, заключенных между 40 322 и 40 330, являются простыми?

161. Какие из чисел, заключенных между 3 628 802 и 3 628 810, являются простыми?

162. Докажите, что наименьшее число, взаимно простое с числами 2, 3, ..., n , просто.

163. Докажите, что для любого натурального n найдется такое натуральное x , что число $nx + 1$ составное.

164. Докажите, что если число n составное, то число $2^n - 1$ тоже составное.

165. Какие остатки при делении на 6 может иметь простое число, большее, чем 3?

166. Докажите, что если $a > 1$, то число $a^4 + 4$ составное.

167. Докажите, что для любого натурального n найдется такое натуральное a , что среди чисел $a+1$, $a+2, \dots, a+n$ нет ни одного простого.

168. Докажите, что если p простое и a не делится на p , то a и p взаимно просты.

169. Докажите, что если произведение ab делится на простое число p , то хотя бы одно из чисел a , b делится на p .

170. Докажите, что если сумма и произведение двух целых чисел делятся на простое число p , то каждое из них делится на p . Верно ли это, если p составное?

171. Известно, что числа p , $p+10$ и $p+14$ простые. Чему равно p ?

172. Известно, что числа p , $p+4$ и $p+14$ простые. Чему равно p ?

173. Известно, что числа p и $8p^2+1$ простые. Чему равно p ?

174. Известно, что числа p , $2p+1$ и $4p+1$ простые. Чему равно p ?

175. Найдите простое число p , если известно, что число $13p+1$ является точным кубом.

176. Докажите, что если k — произвольное натуральное число, то число $2^{4k+2}+1$ составное.

177. Докажите, что при $n \geq 2$ сумма n последовательных нечетных чисел (т. е. сумма $(2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \dots + (2k+2n-1)$) является составным числом.

178. Через $n!$ обозначается произведение всех целых чисел от 1 до n , т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Докажите, что если $n \neq 3$ и число $n!$ не делится на $n+1$, то число $n+1$ простое. Обратно, если $n+1$ простое, то $n!$ не делится на $n+1$.

179. Докажите, что если число $p > 3$ простое, то $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

180. Докажите, что если число $p > 5$ простое, то либо $p^2 \equiv 1 \pmod{30}$, либо $p^2 \equiv 19 \pmod{30}$.

181. Докажите, что если число n имеет нечетный делитель, отличный от 1, то число 2^n+1 составное.

182. При каких натуральных a , b и c число $a^{4b} + 2^{4c-2}$ простое?

183. Докажите, что если $m \neq 4$ и число $(m-1)! + 1$ делится на m , то число m простое.

184. Докажите, что, обратно, если число m простое, то $(m-1)! + 1$ делится на m .

185. Докажите, что если p — простое число и если $ab \equiv 0 \pmod{p}$, то справедливо хотя бы одно из сравнений $a \equiv 0 \pmod{p}$, $b \equiv 0 \pmod{p}$. Справедливо ли это утверждение, если число p — составное?

186. Докажите, что если p — простое число, то многочлен

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{p-2} + x^{p-1}$$

не разлагается в произведение многочленов меньшей степени, имеющих целые неотрицательные коэффициенты.

§ 14. Бесконечность множества простых чисел

Вернемся еще раз к тому способу, с помощью которого мы в предыдущем пункте убедились, что число 101 простое. Мы вычеркнули из чисел 2, 3, 4, 5, 6, ..., 99, 100 составные числа: сначала числа, делящиеся на 2 (кроме числа 2), затем — делящиеся на 3 (кроме числа 3), затем — на 5 (кроме числа 5), затем — на 7 (кроме числа 7). В результате остались невычеркнутыми только простые числа. В самом деле, ни одно простое число не было вычеркнуто (ведь мы вычеркивали только составные числа: кратные двум, трем, пяти и семи). Любое же составное число, не превосходящее 100, имеет простой делитель, квадрат которого не превосходит 100 (см. доказательство теоремы на стр. 46). Иначе говоря, любое составное число, не превосходящее 100, делится на 2, 3, 5 или 7 и потому обязательно было вычеркнуто.

Вот список простых чисел, не превосходящих 100, который таким образом получается:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Таким же способом можно получить список простых чисел, не превосходящих, скажем, 1000 (или другого числа). После каждого вычеркивания надо оставить первое невычеркнутое число (оно будет простым), а все кратные ему числа вычеркнуть. При этом вычеркивание надо производить лишь до тех пор, пока мы не дойдем до последнего простого числа, квадрат которого еще не превосходит 1000 (или другого взятого числа). Все числа, оставшиеся после этого вычеркивания, уже будут простыми.

Указанный способ получения простых чисел, как бы представляющий собой «просеивание» их сквозь «решето» чисел, делящихся на 2, 3, 5, 7 и т. д., был найден древнегреческим математиком Эратосфеном. Он так и называется: решето Эратосфена.

Применение решета Эратосфена естественно вызывает вопрос: не является ли множество простых чисел конечным, т. е. не встретится ли нам в конце концов самое большое простое число, после которого уже больше не будет простых чисел? Возьмем, например, числа, не превосходящие миллиона. Вычеркивая числа, делящиеся на 2, мы уже выбрасываем половину чисел. Вычеркивая затем числа, делящиеся на 3, мы выбрасываем еще третью часть оставшихся чисел. Затем еще надо вычеркнуть числа, делящиеся на 5, на 7, на 11, на 13 и т. д. Не получится ли так, что начиная с некоторого числа мы таким образом вычеркнем все дальнейшие, т. е. что с некоторого места уже больше не будет встречаться простых чисел? Нижеследующая теорема, доказанная еще Евклидом, показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен, т. е. что среди натуральных чисел будут попадаться все новые и новые простые числа.

Теорема. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Допустим, напротив, что простых чисел существует лишь конечное множество, так что их все можно перечислить: 2, 3, 5, 7, 11, ..., p , где через p обозначено самое большое простое число (по нашему предположению такое число существует). Перемножим все эти числа и к их произведению прибавим единицу. Мы получим число $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot p + 1$. Согласно лемме на стр. 46 число A имеет простой делитель, т. е. оно должно делиться на одно из чисел 2, 3, 5, 7, 11, ..., p . Но на 2 число A не делится: ведь произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot p$ на 2 делится, а потому число A дает при делении на 2 остаток 1. По той же причине число A не делится на 3, на 5, на 7, на 11, ..., на p : ведь произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot p$ делится на каждое из этих чисел, а потому число A дает при делении на любое из этих чисел остаток 1.

Мы получили противоречие. Оно показывает, что наше предположение о конечности множества простых чисел ложно, т. е. что в действительности множество простых чисел бесконечно.

Свойствами простых чисел математики интересовались еще с глубокой древности. Существенные результаты в этой области были получены в прошлом столетии выдающимся русским математиком П. Л. Чебышевым. Важные исследования в теории простых чисел были проведены советскими математиками. Наиболее значительные результаты принадлежат академику И. М. Виноградову.

Упражнения

187. Составьте список всех простых чисел, не превосходящих 1000.

188. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 3 остаток 2.

189. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 4 остаток 3.

190. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, имеющих вид $6k - 1$.

191. Из чисел от 1 до 1000! (см. упражнение 178) вычеркнуты все числа, делящиеся на 2, на 3, на 5 и на 7. Какая часть первоначально взятых чисел осталась невычеркнутой?

192. Через $\left[\frac{a}{b}\right]$ обозначается целая часть числа $\frac{a}{b}$, т. е. частное, получающееся при делении a на b с остатком (a и b — натуральные числа). Например, $\left[\frac{20}{3}\right] = 6$ (так как $20 = 3 \cdot 6 + 2$), $\left[\frac{5}{7}\right] = 0$ (так как $5 = 7 \cdot 0 + 5$), $\left[\frac{12}{6}\right] = 2$ и т. д. Докажите, что среди чисел от 1 до a (включительно) имеется $\left[\frac{a}{b}\right]$ чисел, делящихся на b .

193. Числа b и c взаимно просты. Сколько имеется чисел от 1 до a , делящихся хотя бы на одно из чисел b, c ?

§ 15. Разложение на простые множители

Каждое натуральное число m , большее единицы, можно попытаться разложить на простые множители. Возьмем, например, число $m = 882$. Его последняя цифра четна, так что все число делится на 2. Разделив на 2, находим:

$$882 = 2 \cdot 441.$$

Число 441 делится на 3 (поскольку его сумма цифр делится на 3). Разделив на 3, находим: $441 = 3 \cdot 147$, так что

$$882 = 2 \cdot 3 \cdot 147.$$

Число 147 также делится на 3. Мы имеем: $147 = 3 \cdot 49$, так что

$$882 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 49.$$

Наконец, $49 = 7 \cdot 7$, и мы получаем окончательно:

$$882 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

Мы получили запись числа 882 в виде произведения простых чисел, или, как еще говорят, *разложение* числа 882 на простые множители.

Конечно, если само число m просто, например $m = 17$, то в виде «произведения» простых чисел его не представишь. Поэтому, если m — простое число, то его разложением на простые множители будем считать само это число (других простых делителей число m не имеет).

Вот еще два примера разложения чисел на простые множители:

$$28\,350 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7,$$

$$9504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 11;$$

в правильности этих разложений убедитесь самостоятельно.

Разложение числа на простые множители можно выполнять так. Сначала смотрим, не делится ли число на 2. Если делится, находим частное и смотрим, не делится ли это частное снова на 2, затем опять на 2 и т. д. Когда мы получим частное, которое на 2 уже не делится, пробуем делить его на 3, затем на 5 и т. д.

Но совсем не обязательно выполнять вычисления именно в таком порядке. Можно поступать и иначе. Например, заметив, что сумма цифр числа 882 равна 18 (т. е. делится на 9), мы заключаем, что это число делится на 9:

$$882 = 9 \cdot 98.$$

Теперь мы отдельно разлагаем на множители числа 9 и 98:

$$9 = 3 \cdot 3, \quad 98 = 2 \cdot 49 = 2 \cdot 7 \cdot 7.$$

В результате получаем:

$$882 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7.$$

Мы получили такое же разложение числа 882 на простые множители, что и в начале страницы 52, только множители расположены в другом порядке. А можно поступить и так:

$$882 = 2 \cdot 441 = 2 \cdot 21^2 = 2 \cdot (7 \cdot 3)^2 = 2 \cdot 7^2 \cdot 3^2.$$

Опять получилось то же разложение, но с другим порядком множителей.

А что если взять другое число (может быть, очень большое): можно ли его разложить на простые множители? Если можно, то сразу же возникает второй вопрос: будет ли разложение данного числа на простые множители получаться (с точностью до порядка множителей) одним и тем же — независимо от того, каким путем мы пытались разложить это число на множители? Математики формулируют эти вопросы следующим образом. Существует ли разложение любого натурального числа (большего единицы) на простые множители? Единственно ли такое разложение (с точностью до порядка множителей)?

Следующая теорема отвечает на оба вопроса утвердительно.

Теорема. Каждое натуральное число, большее единицы, может быть разложено на простые множители. Любые два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться только порядком множителей.

Иначе говоря, разложение на простые множители всегда существует и (с точностью до порядка множителей) единственно.

Доказательство. Возьмем произвольное натуральное число $m > 1$. Если m простое, то мы уже имеем его разложение на простые множители. Если же число m составное, то согласно лемме на стр. 46 у него найдется простой делитель p_1 . Таким образом, $m = p_1 m_1$, где m_1 — некоторое натуральное число (большее единицы и меньшее m). Если m_1 простое, то мы получили разложение числа m на простые множители: $m = p_1 m_1$. Если же m_1 составное, то у него найдется простой множитель p_2 , так что $m_1 = p_2 m_2$, т. е. $m = p_1 p_2 m_2$. При этом $m > m_1 > m_2 > 1$. Здесь опять имеются две возможности: либо m_2 простое (и тогда $m = p_1 p_2 m_2$ есть разложение числа m на простые множители), либо же m_2 составное (и тогда $m = p_1 p_2 p_3 m_3$, где p_1, p_2, p_3 — простые числа и $m > m_1 > m_2 > m_3 > 1$). Каждый раз, если последний множитель в разложении числа m не является простым,

можно выделить еще один простой множитель, а остающийся последний множитель станет еще меньше. Но так не может продолжаться бесконечно: ведь натуральных чисел, меньших m , имеется лишь конечное множество. Поэтому в конце концов и последний множитель обязательно окажется простым, и мы получим разложение числа m на простые множители:

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{k-1} \cdot p_k.$$

Заметим, что в полученном разложении на простые множители могут по нескольку раз встречаться одинаковые множители: например, как мы видели, $9504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$.

Теперь мы докажем единственность разложения. Пусть мы имеем два разложения числа m на простые множители:

$$m = p_1 p_2 p_3 \dots p_h,$$

$$m = q_1 q_2 q_3 \dots q_l$$

(в первом разложении h простых множителей, а во втором l). Из первого разложения мы видим, что число m делится на p_1 . Но $q_1 q_2 q_3 \dots q_l$ — это то же самое число m . Значит, $q_1 q_2 q_3 \dots q_l$ делится на p_1 . Докажем, что среди простых чисел $q_1, q_2, q_3, \dots, q_l$ обязательно имеется число, равное p_1 . Если $q_1 = p_1$, то мы имеем то, что хотели. Пусть $q_1 \neq p_1$. Тогда q_1 и p_1 взаимно просты (так как это два разных простых числа). А так как произведение $q_1 (q_2 q_3 \dots q_l)$ делится на p_1 , то по теореме 3 на стр. 24 число $q_2 q_3 \dots q_l$ должно делиться на p_1 . Если теперь $q_2 = p_1$, то мы имеем то, что хотели. Если же $q_2 \neq p_1$, то мы точно таким же способом найдем, что произведение $q_3 \dots q_l$ делится на p_1 . Продолжая таким образом, мы либо найдем среди чисел q_1, q_2, \dots, q_{l-1} число, равное p_1 , либо получим, что число q_l делится на p_1 . Но в последнем случае должно быть $q_l = p_1$ (так как число q_l простое).

Итак, среди чисел $q_1, q_2, q_3, \dots, q_l$ обязательно найдется число, равное p_1 . Пусть, например, $q_2 = p_1$. Тогда, разделив равенство

$$p_1 p_2 p_3 \dots p_h = q_1 q_2 q_3 \dots q_l$$

на p_1 , мы получим:

$$p_2 p_3 \dots p_h = q_1 q_3 \dots q_l.$$

Теперь берем простое число p_2 . Левая часть последнего равенства делится на p_2 . Значит, на p_2 делится и правая часть, т. е. число $q_1 q_3 \dots q_l$ делится на p_2 . Поэтому среди чисел q_1, q_3, \dots, q_l обязательно найдется число, равное p_2 (это доказывается точно так же, как мы выше рассуждали с числом p_1). Пусть, например, $q_l = p_2$. Тогда, разделив на p_2 , получим:

$$p_3 \dots p_k = q_1 q_3 \dots q_{l-1}.$$

Теперь мы найдем, что среди оставшихся чисел $q_1, q_3, \dots, \dots, q_{l-1}$ обязательно найдется число p_3 и т. д.

Мы видим, что все числа p_1, p_2, \dots, p_k встречаются (может быть, в другом порядке) среди чисел q_1, q_2, \dots, q_l . И понятно, что ничего другого (кроме чисел p_1, p_2, \dots, p_k , расположенных в ином порядке) среди чисел q_1, q_2, \dots, q_l быть не может — иначе произведение $q_1 q_2 \dots q_l$ было бы больше, чем $p_1 p_2 \dots p_k$.

Таким образом, оба взятых разложения числа m на простые множители с точностью до порядка множителей совпадают. Теорема доказана.

В заключение укажем так называемый канонический вид¹ записи разложения числа на простые множители. Для этого в разложении на простые множители

$$m = p_1 p_2 \dots p_k$$

собирают одинаковые простые множители и записывают число m в виде произведения степеней различных простых чисел. Это и есть канонический вид разложения на простые множители. Иначе говоря, канонический вид выглядит следующим образом:

$$m = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_s^{k_s},$$

где q_1, q_2, \dots, q_s — различные простые числа, а $k_1, k_2, \dots, \dots, k_s$ — некоторые натуральные числа. Например, разложение

$$28\ 350 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

следующим образом записывается в каноническом виде:

$$28\ 350 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

¹ К а н о н — закон. К а н о н и ч е с к и й в и д — узаконенный, общепринятый вид.

Упражнения

194. Запишите в каноническом виде разложение числа 1 000 000 на простые множители.

195. Запишите в каноническом виде разложение числа 1 858 560 на простые множители.

196. Докажите, что наибольший общий делитель двух чисел можно найти следующим образом: нужно написать в каноническом виде разложение этих чисел на множители, взять все общие простые множители в наименьшей встречающейся степени и полученные степени перемножить.

197. Докажите, что два числа в том и только в том случае взаимно просты, если в их каноническом разложении нет общих множителей.

198. Докажите, что наименьшее общее кратное двух чисел можно найти следующим образом: нужно написать в каноническом виде разложение этих чисел на множители, взять все общие множители в наибольшей встречающейся степени, а также множители, встречающиеся только в первом или только во втором числе, и полученные степени перемножить.

199. Найдите (в каноническом виде) наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел $2^5 \cdot 3^7 \cdot 13^3 \cdot 101$ и $3^5 \cdot 13 \cdot 101^2 \cdot 113$.

200. Пользуясь правилами, сформулированными в упражнениях 196, 198, дайте другое доказательство теоремы, сформулированной на стр. 42.

201. Докажите, что натуральное число, большее единицы, в том и только в том случае является точным квадратом, если в канонической записи его разложения на множители все показатели четны.

202. В каком случае натуральное число является точной m -й степенью?

203. Найдите такие цифры a и b , что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ является точным квадратом.

204. Докажите, что сумма квадратов двух нечетных чисел не является точным квадратом.

205. Сформулируйте (пользуясь разложением на множители в каноническом виде) условие, при выполнении которого произведение ab делится на c (где a , b , c — натуральные числа, большие единицы).

206. Сколько натуральных делителей имеет число p^k (где p — некоторое простое число)?

207. Докажите, что если натуральные числа a и b взаимно просты, причем число a имеет m натуральных делителей, а число b имеет n натуральных делителей, то число ab имеет mn натуральных делителей.

208. Сколько делителей имеет число 1 000 000?

209. Докажите, что число

$$m = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_s^{k_s}$$

(записанное в каноническом виде) имеет $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1)$ натуральных делителей.

210. В каком случае натуральное число имеет нечетное число натуральных делителей?

211. Определите, на какую наибольшую степень двойки делится число 20!

212. Докажите, что если p — простое число, а n — натуральное число, то число $n!$ делится на p^k , где $k = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$, и не делится на большую степень числа p . (По поводу обозначения $\left[\frac{a}{b} \right]$ см. упражнение 192.)

213. Докажите, что произведение n любых последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

214. Докажите, что при любых натуральных a и b число $\frac{(a+b)!}{a!b!}$ целое.

215. Делится ли число $\frac{1000!}{500!500!}$ на 7?

216. Докажите, что число $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ делится на $n+1$.

Ответы и указания к упражнениям

1. Если $a \neq 0$, то a делится на $-a$ и $-a$ делится на a (в обоих случаях в частном получается число -1). Если a делится на b и b делится на a , то $|a| = |b| \neq 0$ (т. е. числа a и b отличны от нуля и при этом либо $a = b$, либо $a = -b$).

3—4. См. задачу 19 на странице 341.

6. Надо воспользоваться равенством $(ad + bc) - (ab + cd) = d(a - c) - b(a - c) = (a - c)(d - b)$ и теоремой 1.

10. Рассматривается число $A = abb = 100a + 11b = 7(14a + b) + 2(a + 2b)$ и т. д.

15. Если $r < m$, то это верно, так как из $a = mnq + r$ следует $a = mq_1 + r$, где $q_1 = nq$.

Если же $r \geq m$, то r не может быть остатком при делении на m .

20. Пусть $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Так как $a > b$, то $q \geq 1$ (см. доказательство теоремы на стр. 10–11), и потому $a \geq b + r > 2r$. Отсюда $r < \frac{a}{2}$.

33. Так как $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = (a^2 - 1) + (b^2 - 1) + (c^2 - 1) + 4$, то число $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ только в том случае будет делиться на 8, если $(a^2 - 1) + (b^2 - 1) + (c^2 - 1)$ дает при делении на 8 остаток 4.

Если число a нечетно, $a = 2q + 1$, то $a^2 - 1 = (2q + 1)^2 - 1 = 4q(q + 1)$; так как число $q(q + 1)$ четно (задача 19), то в этом случае число $a^2 - 1$ делится на 8, т. е. $a^2 - 1 = 8k$. Если же a четно, $a = 2q$, то $a^2 = 4q^2$ делится на 4, т. е. имеет вид или $4k + 4$, или $4k + 8$, а потому число $a^2 - 1$ имеет вид $4k + 3$ или $4k + 7$. Итак, число $a^2 - 1$ может иметь вид $8k$, $8k + 3$ или $8k + 7$. То же можно сказать о числах $b^2 - 1$, $c^2 - 1$. Теперь легко видеть, что $(a^2 - 1) + (b^2 - 1) + (c^2 - 1)$ не может при делении на 8 иметь остаток 4.

36. Имеем: $a^3 + b^3 + c^3 = a + b + c + (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$. Каждое из чисел $a^3 - a$, $b^3 - b$, $c^3 - c$ делится на 6 (пример 1 на стр. 12).

37. Пусть \overline{abc} и \overline{def} — данные числа. Тогда $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def} = 999\overline{abc} + \overline{abc} + \overline{def} = 37 \cdot 27\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{def})$.

38. Проверьте, что $10\overline{abc} - \overline{bca}$ и $10\overline{bca} - \overline{cab}$ делятся на 999 и, значит, на 37. Теперь, если $\overline{abc} = 37q$, то $\overline{bca} = 37l$ и $\overline{cab} = 37n$.

42. Если $x \equiv 0 \pmod{3}$, то $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Если же $x \equiv 1 \pmod{3}$ или $x \equiv 2 \pmod{3}$, то $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$. В то же время $3n - 1 \equiv 2 \pmod{3}$. Таким образом, сравнение $x^2 \equiv 3n - 1 \pmod{3}$ не имеет места ни при каких натуральных n и x . Тем более $x^2 \neq 3n - 1$.

45. Имеем: $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = 2^{n+1}(5^{2n+1} \cdot 2 + 3^{n+2} \cdot 2^n) = 2^{n+1}(10 \cdot 25^n + 9 \cdot 6^n)$. Далее, $25 \equiv 6 \pmod{19}$, и потому $10 \cdot 25^n + 9 \cdot 6^n \equiv 10 \cdot 6^n + 9 \cdot 6^n \equiv 0 \pmod{19}$.

46. Среди чисел $1, 11, 111, \dots, \underbrace{11 \dots 1}_n$ найдутся два числа, сравнимые между собой по модулю n . Разность этих двух чисел записывается только единицами и нулями и делится на n .

$$47. -a \equiv 2n - a + 1 \pmod{2n + 1},$$

$$-a^{2^{k-1}} \equiv (2n - a + 1)^{2^{k-1}} \pmod{2n + 1},$$

$$(2n - a + 1)^{2^{k-1}} + a^{2^{k-1}} \equiv 0 \pmod{2n + 1}.$$

49. 12.

50. 3.

52. 7.

53. Так как $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, то надо знать остаток от деления чисел 7^{7^7} и 7^7 на 4. Но $7 \equiv -1 \pmod{4}$, а потому $7^{7^7} \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$, $7^7 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$. Следовательно, $7^{7^{7^7}} \equiv 7^3 \pmod{10}$ и $7^{7^7} \equiv 7^3 \pmod{10}$, откуда вытекает, что данное число на 10 делится.

54. 6.

56. Обозначим через A число, образованное всеми цифрами, следующими за семеркой, а через k — число цифр в числе A . Тогда данное число имеет вид $7 \cdot 10^k + A$, а число, получающееся после перестановки цифры 7 в конец, равно $10A + 7$. По условию $7 \cdot 10^k + A \equiv 5 \pmod{10A + 7}$, откуда $10^k \equiv 7A + 5 \pmod{7}$. Значит, надо найти наименьшее k , для которого $10^k \equiv 5 \pmod{7}$. Легко находим, что $k = 5$. Теперь из уравнения $10^k = 7A + 5$ при $k = 5$ находим $A = 14285$, и потому искомое число равно 714285.

58. Если каждое из чисел $n, n+1$ делится на натуральное d , то и их разность $(n+1) - n = 1$ делится на d . Значит, $d = 1$.

61. Так как $n = 2k - 1$, то $n^3 - n = n(n-1)(n+1) = (2k-1)(2k-2)2k = 4k(k-1)(2k-1)$. Число $k(k-1)$ делится на 2, и потому $n^3 - n$ делится на 8. Далее, $k(k-1) \times (2k-1)$ делится на 3 (проверьте!). Поскольку 8 и 3 взаимно просты, число $n^3 - n$ делится на 24.

62. $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$. Число $n(n-1)(n+1)$ делится на 2 и на 3. Каждое натуральное число может быть представлено в виде $5q$, или $5q \pm 1$, или $5q \pm 2$. Отсюда следует, что число $n(n-1) \cdot (n+1) \times (n^2 + 1)$ делится на 5. В самом деле:

	$n = 5q$	$n = 5q + 1$	$n = 5q - 1$	$n = 5q \pm 2$
На 5 делится	n	$n - 1$	$n + 1$	$n^2 + 1$

Итак, $n^5 - n$ делится на взаимно простые числа 2 и 3, т. е. делится на 6; далее, $n^5 - n$ делится на взаимно простые числа 6 и 5, т. е. делится на 30.

68. $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

69. См. задачи 24 и 25.

75. Если a делится на 3, но не делится на 9, то число $a(a^2 - 1)(a^2 - 4) = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ на 9 не делится.

82. Указанное число делится на 1080 при выполнении хотя бы одного из следующих двух условий: а) $a = 3k$; б) одно из чисел $a-2$, $a-1$, a , $a+1$, $a+2$ делится на 9.

84. Не обязательно. Например, при $a=17$, $b=13$ дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима: $\frac{17-13}{17+13}$, а дробь $\frac{a}{b}$ несократима: $\frac{17}{13}$.

Если же числитель и знаменатель дроби $\frac{a-b}{a+b}$ имеют общий множитель, больший, чем 2, то дробь $\frac{a}{b}$ сократима.

85. Имеем: $n-i+1 \equiv -i \pmod{n+1}$, поэтому $(n-i+1)^k \equiv -i^k \pmod{n+1}$, если k нечетно, т. е. $i^k + (n-i+1)^k \equiv 0 \pmod{n+1}$. Отсюда вытекает, что $2(1^k + 2^k + \dots + n^k)$ делится на $n+1$. Точно так же доказывается делимость на n числа $2(1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k)$.

87. 59.

88. Представьте данное число в виде $9(3^n + 1)(3^n - 1) + 8n$ и рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного n .

89. Чтобы $a^2 + b^2$ делилось на 7, необходимо, чтобы каждое из чисел a , b делилось на 7 (задача 30). То же относится к делимости на 3. Значит, если $a^2 + b^2$ делится на 21, то каждое из чисел a , b делится на 21.

90. Имеем: $n^2 + 3n + 5 \equiv n^2 - 8n + 16 \equiv (n-4)^2 \pmod{11}$. Поэтому $n^2 + 3n + 5$ делится на 11 только в том случае, если $n = 11k + 4$. Но тогда $n^2 + 3n + 5$ при делении на 121 дает в остатке 33.

91. Сумма $x^2 + y^2$ делится на 49 в том и только в том случае, если x и y оба делятся на 7. Значит, каждая из этих переменных может принимать 142 значения. Ответ: $142^2 = 20\,164$ пары.

92. Имеем: $ad - bc = c(a-b) - a(c-d)$. Поэтому число $a(c-d) = c(a-b) - (ad-bc)$ делится на m . А так как a и m взаимно просты, то $c-d$ делится на m .

96. Так как a и b взаимно просты, то существуют такие целые числа x и y , что $ax + by = 1$. Возводя в квадрат, получаем: $a^2x^2 + b(2axy + by^2) = 1$, т. е. $a^2u + bv = 1$, где $u = x^2$ и $v = 2axy + by^2$ — некоторые целые числа. Если теперь d — общий натуральный делитель чисел a^2 и b , то на d делится и число $a^2u + bv$, т. е. 1 делится на d , и потому $d = 1$.

98. Пусть k и m — такие натуральные числа, что $a^k \equiv a^{k+m} \pmod{b}$, где $m > 0$ (см. § 7). Тогда $a^{k+m} - a^k \equiv 0 \pmod{b}$ или $a^k(a^m - 1) \equiv 0 \pmod{b}$, т. е. число $a^k(a^m - 1)$ делится на b . Так как a^k и b взаимно просты (задача 97), то по теореме 3 в § 8 число $a^m - 1$ делится на b , т. е. $a^m - 1 \equiv 0 \pmod{b}$. Следовательно, $a^m \equiv 1 \pmod{b}$.

99. Так как a и b взаимно просты, то найдутся такие целые числа x_0 и y_0 , что $ax_0 + by_0 = 1$, и потому $-ax_0 + 1$ делится на b . Но тогда делится на b и число $-anx_0 + n$, т. е. число $ax + n$, где $x = -nx_0$.

102. Так как $x^3 \equiv x \pmod{6}$ (см. пример 1 на стр. 12), то $(y^2 + 1)x^3 + (y^3 - 1)x \equiv (y^2 + 1)x + (y^3 - 1)x \equiv y^2(y + 1) \times x \pmod{6}$. Поэтому надо найти такое y , что число $y^2(y + 1)x$ при любом x делится на 6. Число $y^2(y + 1)$ на 2 делится всегда. Значит, надо найти те значения y , при которых $y^2(y + 1)$ делится на 3. Легко проверить, что это будет при $y \equiv 0 \pmod{3}$, а также при $y \equiv 2 \pmod{3}$; все такие числа y и являются искомыми.

103. Да. В качестве m можно взять любое число, делящееся на 6.

104. Пусть p и q не взаимно просты: $p = nx$, $q = ny$, $n > 1$. Тогда число $2^p - 1 = (2^n)^x - 1$ делится на $2^n - 1$; число $2^q - 1 = (2^n)^y - 1$ также делится на $2^n - 1$. Но $2^n - 1 > 1$ (так как $n > 1$), и потому числа $2^p - 1$ и $2^q - 1$ не являются взаимно простыми. Пусть теперь числа p и q взаимно просты. Тогда существуют такие целые числа x и y , что $px + qy = 1$. Среди чисел x , y одно положительно, а другое отрицательно (докажите!). Пусть для определенности $x > 0$, $y < 0$, т. е. $y = -z$, где x , z — натуральные числа, причем $px - qz = 1$. Обозначим через d произвольный натуральный делитель чисел $2^p - 1$ и $2^q - 1$. Тогда каждое из чисел $2^{px} - 1$, $2^{qz} - 1$ делится на d . Значит, на d делится и число $(2^{px} - 1) - 2^{px - qz}(2^{qz} - 1) = -1 + 2^{px - qz} = -1 + 2^1 = 1$, откуда следует, что $d = 1$. Итак, числа $2^p - 1$ и $2^q - 1$ не имеют натуральных общих делителей, кроме 1, т. е. эти числа взаимно просты.

109. Признак делимости на 13 формулируется так же, как признак делимости на 7 (стр. 31), только под цифрами числа нужно подписывать (справа налево) следующие коэффициенты

..., 4, 3, -1, -4, -3, 1, 4, 3, -1, -4, -3, 1.

116. Имеем: $4(10a+b) = 13 \cdot 3a + (a+4b)$. Поэтому если $a+4b$ делится на 13, то число $4(10a+b)$ делится на 13, а поэтому (поскольку числа 4 и 13 взаимно просты) число $10a+b$ делится на 13. Обратно, если $10a+b$ делится на 13, то, в силу того же равенства, число $a+4b$ делится на 13.

120. Указание. $100 \equiv -1 \pmod{101}$.

121. Указание. Так как числа m и 10 взаимно простые, то найдется такое натуральное l , что $10^l \equiv 1 \pmod{m}$ (см. задачу 98).

123. Так как $10^6 \equiv 1 \pmod{11}$, то получается следующий позиционный признак делимости на 11 (аналогично формулируется признак делимости на 13): разобьем цифры многозначного числа на группы по шесть цифр в каждой (считая справа) и сложим все полученные шестизначные числа: если эта сумма делится на 11, то и взятое многозначное число делится на 11.

129. Предположим, что у нас получилось четырехзначное число a и что на самом деле должно получиться число b . Тогда вследствие проверки $a \equiv b \pmod{4}$, $a \equiv b \pmod{5}$, $a \equiv b \pmod{7}$, $a \equiv b \pmod{9}$, $a \equiv b \pmod{11}$, т. е. разность $a-b$ делится на каждое из этих чисел 4, 5, 7, 9, 11, а значит, поскольку они взаимно просты, и на их произведение 13 860. Так как по условию числа a и b четырехзначные, то отсюда следует, что $a-b=0$, т. е. $a=b$, и потому можно утверждать, что вычисление произведено верно.

136. Алгоритм Евклида: $2n+2 = 2n \cdot 1 + 2$; $2n = 2 \cdot n$.

137. Алгоритм Евклида: $13a+8b = (5a+3b) \cdot 2 + (3a+2b)$,
 $5a+3b = (3a+2b) \cdot 1 + (2a+b)$, $3a+2b = (2a+b) \cdot 1 + (a+b)$,
 $2a+b = (a+b) \cdot 1 + a$, $a+b = a \cdot 1 + b$.

138. Пусть $(c,b)=d$, $(ac,b)=d_1$. Тогда существуют такие целые числа u, v, x, y , что

$$uc + vb = d, \quad xac + yb = d_1. \quad (*)$$

Кроме того, по условию $(a,b)=1$, т. е. существуют такие целые числа p и q , что $pa+qb=1$. Так как каждое из чисел b, c делится на d , то второе из равенств (*) пока-

ывает, что d_1 делится на d . С другой стороны, $d = uc + vb = uc(pa + qb) + vb = ac(up) + b(ucq + v)$, откуда видно, что d делится на d_1 . Следовательно, $d_1 = d$.

139. Применим алгоритм Евклида: $18a + 5b = (11a + 2b) \cdot 1 + (7a + 3b)$, $11a + 2b = (7a + 3b) \cdot 1 + (4a - b)$, $7a + 3b = (4a - b) \cdot 1 + (3a + 4b)$, $4a - b = (3a + 4b) \cdot 1 + (a - 5b)$, $3a + 4b = (a - 5b) \cdot 3 + 19b$. Значит, $(18a + 5b, 11a + 2b) = (a - 5b, 19b)$. Далее, так как a и b взаимно просты, то числа $a - 5b$ и b также взаимно просты, и потому $(a - 5b, 19b) = (a - 5b, 19)$ (задача 138). Теперь ясно, что если $a - 5b$ делится на 19, то $d = 19$, если нет, то $d = 1$.

140. Если $n = 0$, то имеем 57, если $n = 1$, то получаем 855. Далее, $(855, 57) = 57$. Докажем, что 57 — наибольший общий делитель всех чисел данного вида. Имеем: $7^{n+2} + 8^{2n+1} = 49 \cdot 7^n + 8 \cdot 64^n$, $49 \cdot 7^n \equiv -8 \cdot 7^n \pmod{57}$, $8 \cdot 64^n \equiv 8 \cdot 7^n \pmod{57}$, $49 \cdot 7^n + 8 \cdot 64^n \equiv 0 \pmod{57}$. Итак, 57 — делитель всех рассматриваемых чисел. Поскольку при $n = 0$ большего делителя быть не может, 57 — их наибольший общий делитель.

141. Всего имеем n чисел: $a, a + d, a + 2d, \dots, a + d \times (n - 1)$. Так как ни одно из них не делится на n , то все они при делении на n дают остатки, могущие принимать только $n - 1$ значение: 1, 2, ..., $n - 1$. Значит, среди остатков есть хотя бы два повторяющихся, т. е. хотя бы два данных числа сравнимы по модулю n : $a + kd \equiv a + ld \pmod{n}$, где $k \leq n - 1$, $l \leq n - 1$, $k \neq l$. Отсюда $(a + kd) - (a + ld)$ делится на n , т. е. $(k - l)d$ делится на n . Если бы было $(d, n) = 1$, то число $k - l$ делилось бы на n , что невозможно, так как $|k - l| < n$.

142. Так как $(a, b) = 1$, то $(a^2, b^2) = 1$ (задача 97), т. е. существуют такие целые x, y , что $xa^2 + yb^2 = 1$, т. е. $(xa + yb)(a + b) - (x + y)ab = 1$. Если теперь d — общий наибольший делитель чисел $a + b$ и ab , то левая часть написанного равенства делится на d , и потому $d = 1$.

144. Числа $A = \frac{n(n+1)}{2}$ и $B = 2n + 1$ связаны, как легко проверить, соотношением $B^2 - 8A = 1$. Если теперь d — наибольший общий делитель чисел A и B , то левая часть этого соотношения делится на d , и потому $d = 1$.

145. Положим $d = (a, b)$, $d_1 = ((a, b), c)$ и обозначим через d_2 наибольший общий делитель чисел a, b и c . Тогда существуют такие целые x, y , что $d = xa + yb$, и такие целые p, q , что $d_1 = pd + qc$. Следовательно, $d_1 = pxa +$

$+pyb + qc$. Так как каждое из чисел a, b, c делится на d_2 , то из написанного равенства видно, что d_1 делится на d_2 , и потому $d_1 \geq d_2$. Но неравенство $d_1 > d_2$ невозможно, так как $d_1 = (a, b, c)$ является, очевидно, общим делителем чисел a, b и c , а потому он не может быть больше, чем наибольший общий делитель этих чисел. Таким образом, $d_1 = d_2$.

153. Число $[[a, b], c]$ делится, очевидно, на каждое из чисел a, b и c , т. е. является их общим кратным. Следовательно, оно не меньше, чем их наименьшее общее кратное n_0 , т. е. $[[a, b], c] \geq n_0$. С другой стороны, n_0 делится на каждое из чисел a, b и по следствию 2 делится на $[a, b]$. Кроме того, n_0 делится на c . Применяя опять следствие 2 находим, что n_0 делится на $[[a, b], c]$, и потому $n_0 \geq [[a, b], c]$. Таким образом, $n_0 = [[a, b], c]$.

155. Обозначим через k наименьшее общее кратное чисел $n, n+1, n+2$. Тогда $k = [[n, n+1], n+2]$ (задача 153). Но числа n и $n+1$ взаимно просты, т. е. $(n, n+1) = 1$, и потому, согласно следствию 1, $[n, n+1] = \frac{n(n+1)}{(n, n+1)} = \frac{n(n+1)}{1} = n(n+1)$. Поэтому $k = [n(n+1), n+2]$. Теперь найдем наибольший общий делитель чисел $n(n+1)$ и $n+2$. Так как $n+2$ и $n+1$ взаимно просты, то $(n(n+1), n+2) = (n, n+2)$ (задача 138). Если n четно, то $(n, n+2) = 2$ (задача 136), а если n нечетно, то $(n, n+2) = 1$. Таким образом,

$$k = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)} = \begin{cases} \frac{n(n+1)(n+2)}{2} & \text{при нечетном } n; \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1} & \text{при четном } n. \end{cases}$$

158. $\sqrt{353} < \sqrt{361} = 19$. Значит, нужно проверять делимость числа 353 на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Ответ: 353 — простое число.

159. Так как $\sqrt{2350} < 50$, то нужно проверять делимость на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Ответ: простыми являются числа 2333, 2339, 2341, 2347.

160. 161. Среди этих чисел нет ни одного простого.

162. Обозначим наименьшее число, взаимно простое с 2, 3, ..., n , через a . Если бы число a не было простым, оно делилось бы на некоторое простое число $p < a$. Случай $p \leq n$ невозможен, так как a взаимно просто с каж-

дым из чисел $2, 3, \dots, n$ и потому не делится ни на одно из них. Значит, $p > n$. Но тогда p есть меньшее, чем a , число, взаимно простое с $2, 3, \dots, n$, что также невозможно. Таким образом, число a не может быть составным.

163. Если, например, $x = n + 2$, то $nx + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ — составное.

165. 1 и 5.

166. См. задачу 24 на странице 342.

167. У к а з а н и е. Рассмотрите число $a = n! - 1$.

169. Если a не делится на p , то a и p взаимно просты (задача 168), и потому по теореме 3 на странице 24 число b делится на p .

170. Если $a + b$ и ab делятся на простое число p , то на p делится и число $a(a + b) - ab = a^2$; следовательно, на p делится и число a . Так же устанавливается, что b делится на p . В случае, когда p составное, утверждение может оказаться неверным. Например, возьмем $a = 2$, $b = 6$. Сумма и произведение этих чисел делятся на составное число 4, но ни одно из чисел a, b на 4 не делится.

171. $p = 3$. Если $p > 3$, то $p = 6k \pm 1$ (см. задачу 165).

175. Пусть $13p + 1 = n^3$. Тогда $13p = (n - 1)(n^2 + n + 1)$. Так как произведение $(n - 1)(n^2 + n + 1)$ равно произведению двух простых чисел 13 и p , то возможны следующие варианты: 1) одно из чисел $(n - 1), (n^2 + n + 1)$ равно 1, а другое равно $13p$; 2) одно из этих чисел равно 13, а другое p . Отсюда либо $p = 2$, либо $p = 211$.

176. Число $2^{4k+2} + 1 = 4^{2k+1} + 1$ делится на 5.

177. Данная сумма равна $(n + k)^2 - k^2 = n(n + 2k)$ (так как сумма $1 + 3 + \dots + (2m - 1)$ равна m^2).

178. Будем рассматривать случай $n > 3$ (при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение легко проверяется). Если $n + 1$ составное, то его можно записать в виде произведения двух множителей, больших единицы: $n + 1 = kl$, где $k > 1, l > 1$. При $k \neq l$ оба числа k, l входят множителями в $n!$ и потому $n!$ делится на $kl = n + 1$. Если же $k = l$, то $n + 1 = k^2$, где $k > 2$ (поскольку $n > 3$), и потому $n + 1 > 2k$, т. е. $n \geq 2k$. Значит, оба числа $k, 2k$ входят множителями в $n!$, так что $n!$ делится на $k \cdot 2k$ и потому делится на $k^2 = n$. Итак, если $n + 1$ составное и $n > 3$, то $n!$ делится на $n + 1$. Этим доказано первое утверждение. Второе легко вытекает из утверждения задачи 169.

180. Перепишите сравнение в виде $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{30}$, $p^2 - 49 \equiv 0 \pmod{30}$.

182. $a^{4b} + 2^{4c-2} = (a^{2b})^2 + 2 \cdot a^{2b} \cdot 2^{2c-1} + 2^{4c-2} = (a^{2b} + 2^{2c-1})^2 - a^{2b} \cdot 2^{2c} = (a^{2b} + 2^{2c-1} - a^b 2^c)(a^{2b} + 2^{2c-1} + a^b 2^c)$. Это произведение будет простым, если один из сомножителей (первый) равен 1, а другой — простое число. Итак, $a^{2b} - a^b 2^c + 2^{2c-1} = 1$, откуда $a^{2b} - 2a^b 2^{c-1} + 2^{2c-2} + 2^{2c-2} = 1$ или $(a^b - 2^{c-1})^2 + 2^{2c-2} = 1$. Так как $2^{2c-2} \geq 1$, то это равенство может иметь место лишь при выполнении соотношений $a^b - 2^{c-1} = 0$, $2^{2c-2} = 1$. Теперь легко находим: $c = 1$, $a = 1$. Ответ: $a = c = 1$, b любое.

183. Если $m \neq 4$ составное, то $(m-1)!$ делится на m (см. задачу 178), а значит, $(m-1)! + 1$ не делится на m (1 в остатке).

184. Если $m = 2$ или $m = 3$, утверждение очевидно. Если простое число m больше, чем 3, то докажете, что числа 2, 3, ..., $m-2$ можно разбить на пары таким образом, что произведение чисел каждой пары сравнимо с единицей по модулю p .

185. См. задачу 169. Если p составное, утверждение может оказаться неверным. Пример: $6 \cdot 12 \equiv 0 \pmod{9}$, но ни одно из сравнений $6 \equiv 0 \pmod{9}$, $12 \equiv 0 \pmod{9}$ места не имеет.

186. Предположим, что $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-2} + x^{p-1} = A \cdot B$, где A и B — многочлены меньшей, чем $p-1$, степени с целыми неотрицательными коэффициентами. Полагая в этом равенстве $x = 1$, получим слева сумму коэффициентов данного многочлена (т. е. p), а справа — произведение сумм коэффициентов многочленов A и B . Поэтому сумма коэффициентов одного из многочленов A и B должна равняться единице. Так как все коэффициенты — целые неотрицательные, то это означает, что один из многочленов A , B должен иметь вид x^k (где $k > 0$), что, однако, невозможно, так как данный многочлен на x^k не делится.

188. Предположим, что простых чисел вида $3k+2$ лишь конечное множество, и пусть p_1, p_2, \dots, p_s — все эти числа. Число $B = 3p_1 p_2 \dots p_s + 2$ не делится ни на одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_s и не делится на 3. Поэтому если разложить число B на простые множители: $B = q_1 q_2 \dots q_r$, то среди этих множителей не будет ни одного из чисел 3, p_1, p_2, \dots, p_s . Иначе говоря, все эти простые множители будут числами вида $3k+1$. Но произведение чисел вида $3k+1$ снова является числом того же вида, в то время как B есть число вида $3k+2$. Полученное противоречие и доказывает, что простых чисел вида $3k+2$ бесконечно много.

191. Ровно половина взятых чисел делится на 2, т. е. после вычеркивания чисел, делящихся на 2, останется $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ взятых чисел. Убедитесь, что ровно треть оставшихся чисел делится на 3. Поэтому после вычеркивания чисел, делящихся на 2 или на 3, останется $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)$ первоначального количества чисел. Среди оставшихся ровно пятая часть делится на 5 и т. д.

Ответ: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{35}$.

192. Пусть $a = bq + r$. Тогда чисел, делящихся на b , будет q (это числа $b, 2b, 3b, 4b, \dots, bq$). Остается заметить, что $q = \left[\frac{a}{b}\right]$.

193. Чисел, делящихся на b , имеется $\left[\frac{a}{b}\right]$; чисел, делящихся на c , имеется $\left[\frac{a}{c}\right]$. Среди них и в том, и в другом случае учитывались числа, делящиеся на bc ; их имеется $\left[\frac{a}{bc}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{a}{c}\right] - \left[\frac{a}{bc}\right]$.

200. В произведение $[a, b] \cdot (a, b)$ войдет каждый сомножитель из канонических разложений чисел a и b : большая степень войдет в $[a, b]$, меньшая — в (a, b) (если степени равны, то эта степень войдет и в $[a, b]$, и в (a, b)). Поэтому $[a, b] \cdot (a, b) = ab$.

202. Если в каноническом разложении все показатели кратны m .

205. Для каждого простого числа p , входящего в каноническое разложение числа c , должно быть выполнено следующее условие: показатель, с которым входит p в каноническое разложение числа c , не больше суммы показателей, с которыми p входит в канонические разложения чисел a и b .

206. $k+1$ делителей: $1, p, p^2, \dots, p^k$.

207. Обозначим делители числа a через a_1, a_2, \dots, a_m , делители числа b через b_1, b_2, \dots, b_n . Тогда ab делится на любое произведение $a_1b_1, a_1b_2, \dots, a_1b_n, a_2b_1, a_2b_2, \dots, a_2b_n, \dots, a_mb_n$ и других делителей оно не имеет. Заметим, что среди этих произведений окажутся и сами числа $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1,$

b_2, \dots, b_n , так как среди делителей чисел a и b содержится 1.

208. $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$; число 2^6 имеет семь делителей, число 5^6 имеет семь делителей (задача 206). Так как числа 2^6 и 5^6 взаимно простые, то $1\,000\,000$ имеет $7 \cdot 7 = 49$ делителей (задача 207).

210. Если оно — точный квадрат. Для доказательства заметим, что если a — делитель числа m , то $b = \frac{m}{a}$ также будет делителем числа m , так что $m = ab$. В результате все делители числа m разбиваются на пары (причем произведение делителей для каждой пары равно m). Если m есть точный квадрат: $m = c^2$, то делитель c остается без пары (ведь мы считаем каждый делитель один раз). В результате число, являющееся точным квадратом, оказывается имеющим нечетное число делителей. Если же m не является точным квадратом, то все делители распределяются в пары и число делителей четно. (Другое доказательство можно получить на основании результата задачи 209: число делителей будет нечетным в том и только в том случае, если все числа k_1, k_2, \dots, k_s четны, т. е. если m — точный квадрат.)

211. Среди чисел $1, 2, 3, \dots, 20$, входящих в число $20!$ множителями, 10 чисел делятся на 2, далее 5 из них делятся на 4, наконец 2 числа делятся на 8 и одно число делится на 16. Поэтому $20!$ делится на $2^{10+5+2+1} = 2^{18}$. Этот же подсчет можно (пользуясь результатом задачи 192) провести так:

$$\left[\frac{20}{2} \right] + \left[\frac{20}{4} \right] + \left[\frac{20}{8} \right] + \left[\frac{20}{16} \right] = 18.$$

212. См. решение задачи 211.

213. Пусть имеем произведение $(m+1)(m+2)\dots\dots(m+n) = \frac{(m+n)!}{m!}$. Пусть, далее, каноническое разложение числа n таково: $n = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \dots q_s^{k_s}$. Рассмотрим, например, множитель $q_1^{k_1}$. Тогда $k_1 = \left[\frac{n}{q_1} \right] + \left[\frac{n}{q_1^2} \right] + \dots$. В произведение $(m+n)!$ простое число q_1 входит в степени $l_1 = \left[\frac{m+n}{q_1} \right] + \left[\frac{m+n}{q_1^2} \right] + \dots$, а в $m!$ оно входит в степени $t_1 = \left[\frac{m}{q_1} \right] + \left[\frac{m}{q_1^2} \right] + \dots$. Нетрудно доказать, что $\left[\frac{a+b}{c} \right] \geq$

$\geq \left[\frac{a}{c} \right] + \left[\frac{b}{c} \right]$. Поэтому $l_1 - t_1 \geq k_1$, т. е. $\frac{(m+n)!}{m!}$ делится на $q_1^{k_1}$. Аналогично доказывается делимость на $q_3^{k_3}, \dots$, $q_s^{k_s}$. Итак, $\frac{(m+n)!}{m!}$ делится на $n!$

214. См. задачу 213.

215. Подсчитайте, на какую наибольшую степень числа 7 делится $1000!$ и $(500!)^2$. Ответ: не делится.

216. Число $\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$ является целым (задача 214), т. е. число $\frac{(2n)!}{(n!)^2} (2n+1)$ делится на $n+1$. Так как числа $n+1$ и $2n+1$ взаимно просты, то на $n+1$ делится число $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

К учителю

Материал факультативного курса рассчитан на VII—VIII классы. В тексте имеется более 200 задач, среди которых много довольно трудных. Рекомендуем самостоятельно добавить ряд более простых числовых упражнений: на выполнение деления с остатком (§ 3), на решение задач с помощью сравнений (§ 6), на применение признаков делимости (§ 9), на нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Желательно рассказать учащимся о работах русских и советских математиков по теории чисел.

Л и т е р а т у р а :

Виноградов И. М. Основы теории чисел.

Шнирельман Л. Г. Простые числа.

Арнольд И. В. Теория чисел.

Радемахер и Теплиц. Числа и фигуры.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Р. С. Гутер

§ 1. Системы счисления. Непозиционные системы

Чтобы иметь дело с числами, необходимо прежде всего уметь называть и записывать их. Способ наименования и записи чисел принято называть *системой счисления*. Привычной для нас и общепринятой является *позиционная десятичная система счисления*.

Чтобы лучше ее понять, необходимо познакомиться с другими системами. Возможно много различных систем счисления, которые делятся на две большие группы — *позиционные* и *непозиционные*. Начнем с рассмотрения *непозиционных систем*. Это облегчит нам знакомство с позиционными системами. На некоторое время ограничимся рассмотрением лишь натуральных, т. е. целых положительных, чисел.

Самым простым способом записи натурального числа является изображение его с помощью соответствующего количества черточек или палочек. Такой способ применяли в глубокой древности все народы. Ясно, что он приемлем лишь для записи небольших чисел — в пределах одного-двух десятков.

Следующим шагом было изобретение для обозначения чисел специальных знаков. Любопытно, что при этом знак, изображающий единицу, почти во всех системах очень напоминал простую черточку. Это сходство сохранилось и по сей день.

В непозиционной системе счисления каждый знак, употребляемый для записи чисел, или, как мы сейчас говорим, каждая *цифра*, всегда означает одно и то же число. Слово *цифра* как раз и означает знак, используемый для изображения числа.

Хорошо известным примером непозиционной системы счисления является пришедшая к нам из древнего Рима *римская система*, в которой роль цифр играют буквы латинского алфавита. Буква I всегда означает единицу (заметьте, что латинская I больше любой другой латинской буквы напоминает обычную черточку), буква V — пять, буква X — десять, L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысячу. Число 378 запишется в римской системе в виде

CCCLXXVIII

В славянской системе нумерации, тоже непозиционной, роль цифр также играли буквы алфавита, над которыми ставился знак \sim (титло). В отличие от римской системы, в славянской для обозначения цифр употреблялись все буквы алфавита. Различные буквы обозначали единицы, десятки и сотни. Те же буквы обозначали и числа высших разрядов, но для обозначения тысяч перед каждой буквой ставился знак \times . Например, число 324 в славянской

системе записывалось в виде $\overset{\sim}{\text{Т}}\text{КД}$

(титло ставилось только над одной из букв).

Запись числа в славянской и особенно римской системах очень громоздка и неудобна, так как требует большого числа различных знаков. Чтобы уменьшить число знаков, требуемых для записи какого-либо числа, в римской системе было введено следующее правило: если поместить букву, означающую меньшее число, слева от буквы, означающей большее, то меньшее число следует из большего вычитать. По этому правилу для записи числа четыре не нужно писать четыре раза букву I, а написать IV. Аналогично IX означает девять, XL — сорок, XC — девяносто и т. д.

Записать в римской системе число тысяча, пользуясь лишь знаками I, V, X, очень трудно. С помощью всех введенных выше знаков римской системы тысячу изобразить

легко (для нее есть специальный знак), но трудно изобразить сто тысяч. Ясно, что, сколько ни вводить новых знаков, всегда можно придумать число, которое трудно изобразить уже введенными знаками. Такое затруднение характерно для любой непозиционной системы.

Очень неудобны и сложны в непозиционной системе арифметические действия. Попробуйте, например, пользуясь только римской системой, сложить числа CCCLIX и CLXXIV. Еще труднее обстоит дело с умножением. Поэтому нет ничего удивительного в том, что римская система была быстро вытеснена позиционной. Запись чисел римскими цифрами применяется теперь очень редко и только в тех случаях, когда не требуется выполнять над числами арифметические действия, например для нумерации глав в книгах, веков и т. п.

§ 2. Позиционные системы счисления. Десятичная система

Общепринятой системой счисления является *десятичная позиционная система*, берущая свое начало от счета на пальцах. Она была изобретена в Индии, затем заимствована там арабами и уже через арабские страны пришла в Европу. В этой системе для записи любого числа используется лишь десять цифр — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Значение каждой цифры в позиционной системе счисления определяется не только ею самой, но также и местом (позицией), которое она занимает в записи числа.

Например, единица изображается цифрой 1. Можно было бы писать 01 или 001¹, во всех случаях цифра 1 стоит на первом месте справа. Если же эта цифра переместится на второе место справа, то мы получим уже число 10 или 010, т. е. десять. Число сто изображается той же цифрой 1, но уже стоящей на третьем месте справа — 100 и т. д.

Таким образом, для позиционной системы характерно то, что число разбивается на *разряды*, которые считаются

¹ Запись целого числа с нулями впереди иногда употребляется в тех случаях, когда для изображения числа используется определенное количество цифр. Так, показания электрического счетчика всегда четырехзначны, например единица на нем обозначается как 0001. Так же записываются номера лотерейных билетов и т. п.

справа налево, и каждая цифра в записи числа означает определенное количество единиц именно того разряда, в котором эта цифра стоит. Запись 568 означает, следовательно, что число состоит из восьми (простых) единиц, шести десятков и пяти сотен.

Единица каждого следующего разряда всегда в определенное число раз превосходит единицу предыдущего. Это отношение называют *основанием системы счисления*. Наша система счисления потому и называется *десятичной*, что ее основанием является число *десять*: каждый следующий разряд в десять раз больше предыдущего.

Записывая целое число в десятичной системе счисления, мы представляем его в виде суммы единиц, десятков, сотен, тысяч, десятков тысяч и т. д. Заметим, что все названные здесь числа являются степенями числа 10:

$$100 = 10^2, \quad 1000 = 10^3, \quad 10\,000 = 10^4, \dots$$

Поэтому можно сказать, что запись числа в десятичной системе счисления означает представление этого числа в виде суммы степеней десяти с различными коэффициентами. Эти коэффициенты и являются цифрами в записи числа. Например, запись 135 609 в десятичной системе означает $135\,609 = 1 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$.

Правая часть написанного равенства по внешнему виду напоминает многочлен. И действительно, если обозначить основание системы 10 какой-либо буквой, например d , то можно написать

$$135\,609 = d^5 + 3d^4 + 5d^3 + 6d^2 + 0d + 9.$$

Общеупотребительная запись числа является сокращенной формой записи этого многочлена: опущены плюсы и буква, заменяющая десятку в разных степенях.

Правила выполнения арифметических действий в позиционной десятичной системе счисления очень просты и достаточно хорошо известны. Несмотря на это, мы коротко рассмотрим их, так как такой анализ будет нам полезен в дальнейшем, при рассмотрении действий в других системах счисления.

Складывая два многозначных числа в позиционной десятичной системе, мы пользуемся хорошо известным пра-

вилом «сложения столбиком». Второе слагаемое записывается под первым так, чтобы цифры, соответствующие одинаковым разрядам, находились друг под другом. После этого мы складываем числа в каждом разряде, начиная с младшего — справа налево. Поэтому дело сводится к сложению однозначных чисел и возможному переносу из младших разрядов в старшие.

В качестве примера рассмотрим сложение:

$$\begin{array}{r} 135614 \\ + 29753 \\ \hline 165367 \end{array}$$

Складывая единицы отдельно и десятки отдельно, мы сразу получаем цифры для единиц и десятков суммы: $4 + 3 = 7$ и $1 + 5 = 6$. При сложении сотен: $6 + 7 = 13$. Но 13 сотен — это три сотни и одна единица следующего, старшего разряда — тысяча. Поэтому «три пишем и один в уме». Эта единица «в уме» учитывается при сложении в разряде тысяч, где мы должны уже складывать $5 + 9 + 1 = 15$, и снова получаем «один в уме», т. е. единицу переноса в следующий разряд — десятков тысяч.

Если складывается не два слагаемых, а больше, то может возникнуть необходимость переноса в старший разряд уже не одной единицы, а нескольких. Тем не менее сложение в десятичной позиционной системе всегда сводится к *сложению однозначных чисел*. Чтобы выполнить любое сложение, достаточно знать *таблицу сложения*. Эта таблица должна содержать суммы всех возможных пар однозначных чисел, подобно известной таблице умножения. Выписывать таблицу сложения для десятичной системы не стоит, так как она достаточно хорошо известна.

Тем же правилам подчиняется и вычитание многозначных чисел, с той только разницей, что может потребоваться перенос не из младшего разряда в старший, как это имело место при сложении, а, наоборот, из старшего в младший. Например,

$$\begin{array}{r} 75364 \\ - 27821 \\ \hline 47543 \end{array}$$

Умножение многозначных чисел «столбиком» также сводится к многократному умножению однозначных и после-

дующему сложению. Вот почему такую большую роль играет *таблица умножения*, которая, собственно, и содержит всевозможные попарные произведения однозначных чисел друг на друга. Пример:

$$\begin{array}{r}
 \times 75821 \\
 4364 \\
 \hline
 303284 \\
 + 454926 \\
 + 227463 \\
 + 303284 \\
 \hline
 330882844
 \end{array}$$

Не так просто коротко сформулировать правила «деления уголком», но мы и не станем этим заниматься. Эти правила предполагаются хорошо известными. Для нас сейчас существенно лишь то, что «деление уголком» сводится к выполнению действий уже известных и рассмотренных: делению однозначных чисел, умножению и вычитанию. В этом легко убедиться хотя бы на следующем примере:

$$\begin{array}{r}
 44373683 \overline{) 841} \\
 \underline{4205} \quad 52763 \\
 2323 \\
 \underline{1682} \\
 6416 \\
 \underline{5887} \\
 5298 \\
 \underline{5046} \\
 2523 \\
 \underline{2523} \\
 0
 \end{array}$$

§ 3. Позиционные системы с другим основанием

Кроме десятичной системы счисления, о которой шла речь в предыдущем параграфе, возможны позиционные системы счисления с любым другим натуральным основанием.

В древнем Вавилоне, например, применялась шестидесятеричная система счисления. Остатки ее мы находим в сохранившемся до наших дней делении часа или градуса на 60 минут, а минуты на 60 секунд. Эта система возникла около двух тысячелетий до нашей эры при слиянии в одно государство двух древних народов — сумерийцев и аккадян. Во вновь образованном едином государстве остались в ходу единицы веса, используемые ранее тем и другим народами. Одна из этих единиц была приблизительно в шестьдесят раз больше другой. Установившееся соотношение единиц во взвешивании было перенесено и в другие области, требовавшие счета.

Очень широкое распространение имела в древности, особенно на Ближнем Востоке, двенадцатеричная система. Ее происхождение, по всей вероятности, связано, как и десятичной системы, со счетом на пальцах, только за единицу принимался не отдельный палец, а фаланги (отдельные суставы) четырех пальцев одной руки, которые перебирались большим пальцем. Так как каждый палец состоит из трех фаланг (трех суставов), то всех фаланг получалось 12.

Остатки двенадцатеричной системы счисления сохранились до наших дней и в устной речи, и в обычаях. Хорошо известно название для числа двенадцать, т. е. для единицы второго разряда в двенадцатеричной системе, — *дюжина*. Сохранился обычай считать многие предметы не десятками, а дюжинами, например столовые приборы в сервизе или стулья в мебельном гарнитуре.

Сейчас уже редко встречается название единицы третьего разряда в двенадцатеричной системе — *гросс*, означающее дюжину дюжин. Однако четыре-пять десятилетий назад оно встречалось довольно часто, особенно в торговле. И В. В. Маяковский, высмеивая в 1928 г. запасливых мещан, скупающих подряд все нужное и ненужное, писал в стихотворении «Плюшкин»:

«... укупил
двенадцать гроссов
дирижерских палочек».

У ряда африканских племен и в древнем Китае была употребительна пятеричная система счисления. В Центральной Америке (у ацтеков и майя) и среди населявших Западную Европу древних кельтов была распространена

двадцатеричная система. Все они, очевидно, также связаны со счетом на пальцах, имея, так сказать, «анатомическое» происхождение.

Все позиционные системы с любым натуральным основанием устроены одинаково. В каждой такой системе для записи числа употребляется определенное количество знаков — цифр, и число, изображаемое данной цифрой, зависит как от самой цифры, так и от места (позиции), которой эта цифра в записи числа занимает.

Количество требуемых для записи числа цифр, как легко догадаться, определяется основанием системы счисления. Различных цифр должно быть ровно столько, сколько существует натуральных чисел, меньших основания, так как все эти числа в данной системе являются однозначными и должны изображаться разными знаками. Если мы учтем, что, кроме этих цифр, необходим еще и нуль, то станет ясно, что *для записи числа в позиционной системе с основанием n требуется ровно n цифр*. Так, в десятичной системе счисления, как мы уже знаем, для записи числа употребляется десять цифр. В пятеричной системе достаточно пяти цифр. Естественно использовать те же цифры 0, 1, 2, 3, 4. Основание системы — число *пять* — изобразится здесь как 10, поскольку оно является единицей следующего (второго) разряда. Следующие числа, однозначные в десятичной системе, в пятеричной будут двужначными. Например, число семь в пятеричной системе будет выглядеть как 12 — одна единица второго разряда (пятерка) и две единицы первого. Десятичное число 25 равно квадрату основания системы, т. е. единице третьего разряда, и потому запишется в пятеричной системе в виде 100.

По тем же причинам в двенадцатеричной системе для записи числа нужно иметь двенадцать цифр. Мы можем, как и для пятеричной системы, воспользоваться обычными цифрами, но, кроме них, требуется иметь еще две цифры для изображения чисел, равных *десяти* и *одиннадцати*, поскольку в двенадцатеричной системе они меньше основания и, следовательно, однозначны. Введя, например, для этих чисел обозначения $\bar{0}$ и $\bar{1}$, получим двенадцать различных цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\bar{0}$, $\bar{1}$. Число *двенадцать*, являющееся основанием системы счисления, запишется в этой системе как 10. Легко понять, что так будет в любой системе счисления: *основание системы всегда записывается как 10*.

Чтобы различать, в какой системе записано число, если это не следует из сказанного, мы будем указывать основание системы мелким шрифтом справа внизу числа. Например, число 257_{10} записано в обычной десятичной системе, 257_8 — в восьмеричной, а 257_{12} — в двенадцатеричной системе. При этом само основание во всех случаях пишется в десятичной системе!

Упражнения

1. Запишите в десятичной системе числа 10_5 , 100_5 , 1000_5 и 10000_5 .

2. Как пишется в двенадцатеричной системе gross и дюжина grossов?

3. В какой системе счисления справедливо равенство $3 \times 4 = 10$?

4. Существует ли система счисления, в которой одновременно $3 + 4 = 10$ и $3 \times 4 = 15$; $2 + 3 = 5$ и $2 \times 3 = 11$?

5. В какой системе счисления справедливо равенство $10 \times 10 = 100$?

6. Назовем *круглыми* все числа, оканчивающиеся нулем, и *совсем круглыми* числа, оканчивающиеся двумя нулями. Выпишите все двузначные круглые и трехзначные совсем круглые числа в пятеричной системе и переведите их в десятичную систему.

7. Каким свойством должно обладать десятичное число, чтобы после перевода в семеричную систему счисления оно было круглым или совсем круглым?

8*1. Ответьте на предыдущий вопрос для позиционной системы с произвольным натуральным основанием n .

9. Два целых числа выражаются одними и теми же цифрами в различных позиционных системах счисления. Определите, какое из этих чисел больше.

10. Можно ли отличить четные числа от нечетных по их записи в троичной системе счисления? Сформулируйте требуемое правило, если оно возможно.

11*. Сформулируйте условие, позволяющее определить четность числа по его записи в системе с основанием n . Как меняется это условие в зависимости от четности или нечетности основания n ?

¹ Звездочкой помечены более трудные задачи.

§ 4. Восьмеричная система счисления

Среди позиционных систем счисления, кроме общепринятой десятичной системы, особое место занимают еще две — восьмеричная, которой посвящен настоящий параграф, и двоичная, речь о которой будет ниже, в § 8.

К восьмеричной системе относится все то, что было сказано в предыдущих параграфах о позиционной системе вообще. Для записи числа в восьмеричной системе используются восемь цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Число *восемь* запишется уже в виде 10, так как является единицей следующего разряда. Единица третьего разряда равна квадрату основания, т. е. $100_8 = 64_{10}$.

Арифметические действия над числами в восьмеричной системе выполняются по тем же правилам, которые рассмотрены в § 2 для десятичной системы. Впрочем, лучше сказать, что действия над многозначными числами по тем же самым правилам сводятся к действиям над однозначными, так как действия над однозначными числами выглядят в восьмеричной системе уже по-иному, чем в десятичной.

Мы хотим обратить особое внимание читателя на слово «выглядят» в предыдущем предложении. Это слово очень точно передает существо дела. Арифметические действия именно *выглядят* по-разному в различных системах, хотя числа, в них участвующие, остаются теми же. Произведение 3×5 есть вполне определенное единственное число, однозначно определяющееся множителями и ни от чего другого не зависящее. Дело только в том, что это число *в различных системах счисления записывается различными цифрами*. Так, в десятичной системе счисления $3 \times 5 = 15$, тогда как в восьмеричной $3 \times 5 = 17$, а в двенадцатеричной $3 \times 5 = 13$. Но во всех трех случаях речь идет об одном и том же числе, т. е. справедливо равенство $17_8 = 15_{10} = 13_{12}$.

Из сказанного ясно, что, прежде чем рассматривать действия с многозначными числами, нужно составить таблицы для сложения и умножения однозначных чисел в восьмеричной системе. Дело это очень простое, и мы предоставим читателю выполнить его самостоятельно, ограничившись приведением лишь одного столбика из каждой таблицы.

Вот как они выглядят:

$$\begin{array}{ll}
 3+1=4, & 5 \cdot 1=5, \\
 3+2=5, & 5 \cdot 2=12, \\
 3+3=6, & 5 \cdot 3=17, \\
 3+4=7, & 5 \cdot 4=24, \\
 3+5=10, & 5 \cdot 5=31, \\
 3+6=11, & 5 \cdot 6=36, \\
 3+7=12, & 5 \cdot 7=43.
 \end{array}$$

Пользуясь таблицами сложения и умножения для однозначных чисел (разумеется, полными, а не только приведенными столбцами), можно выполнять действия над многозначными числами в восьмеричной системе по правилам, общим для всех позиционных систем. Рассмотрим пример на сложение и вычитание:

$$\begin{array}{r}
 + \quad 37564 \\
 \quad 44205 \\
 \hline
 103771
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 26371 \\
 -17063 \\
 \hline
 7306
 \end{array}$$

Сложение нескольких слагаемых выглядит в восьмеричной системе так:

$$\begin{array}{r}
 23074 \\
 + 15341 \\
 + 62110 \\
 + 30576 \\
 \hline
 153343
 \end{array}$$

Приведем еще по одному примеру на умножение и деление в восьмеричной системе:

$$\begin{array}{r}
 \times 25176 \\
 \quad 1534 \\
 \hline
 124770 \\
 77572 \\
 + 152166 \\
 + 25176 \\
 \hline
 43537510
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 40026613 \mid 1155 \\
 -3507 \\
 \hline
 2736 \\
 -2332 \\
 \hline
 4046 \\
 -3507 \\
 \hline
 3371 \\
 -2332 \\
 \hline
 10373 \\
 -10373 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Таких примеров можно привести бесчисленное множество.

Упражнения

12. Запишите в десятичной системе счисления числа 10_8 , 100_8 , 1000_8 , 10000_8 .

13. Пользуясь результатами задачи 12, переведите в десятичную систему числа 12_8 , 14_8 , 1750_8 , 23420_8 .

14. Составьте таблицу сложения однозначных чисел в восьмеричной системе.

15. Составьте таблицу умножения однозначных чисел в восьмеричной системе.

16. Проверьте правильность приведенных примеров арифметических действий с помощью таблиц, составленных в задачах 14 и 15.

17. Выполните указанные арифметические действия в восьмеричной системе счисления:

- а) $426 + 352$; б) $1020 - 534$; в) 17×71 ; г) $4704:31$;
д) $(563 + 217) \times 15 + (2365 - 636):17$.

§ 5. Перевод целых чисел из одной позиционной системы счисления в другую

Как мы уже говорили в § 2, запись целого числа в десятичной системе счисления означает представление этого числа в виде суммы степеней десяти с различными коэффициентами. Последние и служат цифрами числа. Это утверждение распространяется, очевидно, на любую позиционную систему счисления: *запись целого числа в любой позиционной системе счисления означает представление этого числа в виде суммы степеней основания с различными коэффициентами, меньшими основания. Эти коэффициенты и являются цифрами числа.*

Сказанное выше можно использовать при переводе числа, записанного в любой позиционной системе, в десятичную систему. Пусть, например, нам дано в восьмеричной системе число 2536. Эта запись означает, что данное число представляется в виде суммы

$$2536_8 = 2 \cdot 10^3_8 + 5 \cdot 10^2_8 + 3 \cdot 10^1_8 + 6.$$

Но основание восьмеричной системы счисления 10_8 в десятичной системе записывается как 8. Поэтому наше равенство может быть переписано с десятичными чис-

лами:

$$2536_8 = 2 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 6 = 2 \cdot 512 + 5 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 6 = \\ = 1024 + 320 + 24 + 6 = 1374.$$

Итак,

$$2536_8 = 1374_{10}.$$

Точно так же

$$4107_8 = 4 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 = 2048 + 64 + 7 = 2119_{10}.$$

Мы получили, таким образом, способ перевода числа, записанного в какой-либо позиционной системе, в десятичную систему.

Собственно говоря, это же соображение можно использовать не только для десятичной системы, но и для любой другой, например для обратного перевода из десятичной системы, скажем, в восьмеричную.

Действительно, пусть дано десятичное число 3782_{10} . Эта запись означает

$$3782_{10} = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2.$$

Но $8_{10} = 10_8$ и $10_{10} = 12_8$. Поэтому наше равенство можно переписать с восьмеричными числами:

$$3782_{10} = 3 \cdot 12_8^3 + 7 \cdot 12_8^2 + 10_8 \cdot 12_8 + 2 = 3 \cdot 1750_8 + 7 \cdot 144_8 + \\ + 10_8 \cdot 12_8 + 2 = 5670_8 + 1274_8 + 120_8 + 2 = 7306_8.$$

Заметим только, что в этом переводе числа из десятичной системы в восьмеричную нам потребовалось производить вычисления в восьмеричной системе, что, во всяком случае, менее привычно, чем в десятичной. Естественно искать такой способ перевода десятичного числа в восьмеричную (или в другую позиционную) систему, в котором пришлось бы выполнять арифметические действия в десятичной системе счисления.

Возьмем то же самое десятичное число 3782_{10} . Для его перевода в восьмеричную систему его нужно представить в виде суммы степеней числа *восемь*. Выпишем несколько степеней числа 8:

$$8^1 = 8, \quad 8^2 = 64, \quad 8^3 = 512, \quad 8^4 = 4096.$$

Теперь мы видим, что наше число $3782 < 8^4$ и может содержать только 8^3 с каким-либо коэффициентом. Легко подсчитать подбором или делением 3782 на 512 , что

$$3782 = 7 \cdot 8^3 + 198.$$

В свою очередь число 198 содержит 3 раза по 64, т. е.

$$3782 = 7 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6.$$

Мы получили требуемое представление нашего десятичного числа в виде суммы степеней восьми с коэффициентами, что означает равенство

$$3782_{10} = 7306_8,$$

уже полученное нами ранее.

Перевод числа из десятичной системы в восьмеричную потребовал здесь вычислений в десятичной системе. Однако нам пришлось предварительно вычислять различные степени нового основания. Оказывается, что без этого можно обойтись, если вести вычисления в другом порядке.

Рассмотрим снова то же число 3782 и разделим его на 8. Получим в частном 472 и в остатке 6, т. е.

$$3782 = 472 \cdot 8 + 6.$$

Это означает, что наше число, кроме некоторого количества восьмерок, содержит еще шесть единиц, т. е. последняя цифра восьмеричной записи числа есть 6.

Для определения следующей (второй справа) цифры разделим полученное частное 472 снова на 8. Найдем, что частное равно 59, а остаток — нулю. Последний и дает нам следующую цифру — нуль, так как результат второго деления можно представить в виде

$$3782 = (59 \cdot 8 + 0) \cdot 8 + 6 = 59 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6.$$

Остается разделить 59 на 8. Так как $59 = 7 \cdot 8 + 3$, то

$$3782 = (7 \cdot 8 + 3) \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6 = 7 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 6.$$

Мы снова получили то же самое представление, но путь, по которому на этот раз мы шли, более удобен: требовалось только делить десятичное число на новое основание и выписывать остатки, которые и дают восьмеричные цифры числа справа налево.

Полученное правило можно формулировать так: *цифрами, представляющими число в восьмеричной системе, будут остатки от последовательного деления этого числа на 8, записанные в обратном порядке.* Такое же правило справедливо и для любой позиционной системы счисления; нужно только заменить число 8 основанием рассматриваемой системы.

Вычисления удобно располагать, как показано ниже при переводе в восьмеричную систему числа 38697_{10} :

$$\begin{array}{r|l}
 38697 & 8 \\
 \hline
 66 & 4837 \\
 \hline
 29 & 37 \\
 \hline
 57 & 5 \\
 \hline
 1 & 44 \\
 & 4
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 8 \\
 \hline
 604 \\
 \hline
 75 \\
 \hline
 3
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 8 \\
 \hline
 9 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 8 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 .$$

В результате вычислений получаем: $38697_{10} = 113451_8$.

Упражнения

18. Переведите в десятичную систему счисления числа 7542_8 , 3605_8 , 3014_8 .

19. Переведите в восьмеричную систему десятичные числа 12005 , 8791 , 6348 .

20. Переведите в десятичную систему числа из примеров упражнения 17, § 4 и проверьте результаты действий в десятичной системе.

21. Можно ли воспользоваться последовательным делением при переводе числа из восьмеричной системы в десятичную? Примените этот способ при переводе в десятичную систему числа 20621_8 и объясните полученный результат.

§ 6. Дробные числа и способы их записи. Перевод дробей из одной позиционной системы в другую

До сих пор мы рассматривали только целые числа. Настоящий параграф посвящен дробям и действиям с ними.

Нам известны обыкновенные и десятичные дроби. Обыкновенные дроби связаны с десятичной системой счисления лишь постольку, поскольку их числитель и знаменатель — целые числа — записываются в этой системе. Да и правила арифметических действий с обыкновенными дробями очень отличаются от правил действий с целыми числами. При переходе в другую систему счисления эти дроби изменяются мало.

Совсем другое дело *десятичные дроби*. Уже само их название показывает, что они самым тесным образом связаны именно с десятичной системой счисления.

Как известно, десятичной дробью называют такую дробь, знаменатель которой есть некоторая степень десяти. Записывается такая дробь без знаменателя и только наличием запятой отличается по внешнему виду от целого числа. И правила арифметических действий с десятичными дробями отличаются от правил соответствующих действий с целыми числами лишь дополнительными указаниями относительно места запятой.

Такое сходство не случайно. Рассмотрим, например, десятичную дробь 0,375. Эта запись означает число $\frac{375}{1000}$. С другой стороны, $0,375 = 0,3 + 0,07 + 0,005$, а отдельные слагаемые, в свою очередь, равны $\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{5}{1000}$. Следовательно, мы можем сказать, что запись 0,375 означает представление этого числа в виде суммы

$$0,375 = 3 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3,$$

т. е. в виде суммы степеней... но не основания системы счисления 10, как это было для целых чисел, а числа, обратного основанию, т. е. $\frac{1}{10}$. Цифры, как и для целых чисел, играют роль коэффициентов при степенях.

Мы можем поэтому сказать, что запись дробного числа в виде десятичной дроби представляет собой перенесение на дробные числа общего принципа записи чисел в позиционной десятичной системе счисления.

Аналогичную запись можно распространить и на любую другую позиционную систему счисления, например восьмеричную. Дробь, которая в десятичной системе счисления равна сумме

$$3 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3,$$

естественно называть *восьмеричной дробью* и записывать ее в восьмеричной системе счисления как $0,375_8$. Ясно, что $0,375_{10}$ и $0,375_8$ — разные числа.

Правила арифметических действий над восьмеричными дробями такие же, как и над десятичными, но только при действиях с однозначными числами нужно пользоваться восьмеричными таблицами сложения и умножения.

Например,

$$\begin{array}{r} + 0,3475 \\ 0,2633 \\ \hline 0,6330 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 0,256 \\ 0,14 \\ \hline 1270 \\ + 256 \\ \hline 0,04050 \end{array}$$

Известно, что не всякая простая дробь может быть записана в виде конечной десятичной дроби. Например, $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$. Так как при вычислениях обычно пользуются десятичными дробями, то такую бесконечную дробь приходится обрывать в каком-либо месте и заменять конечной, приближенно выражающей данное число.

Такое же явление наблюдается и в других позиционных системах счисления, с другим основанием. При этом одни и те же числа могут в одной системе счисления записываться конечными дробями, а в других — бесконечными, и наоборот. Так, например, в десятичной системе счисления число $\frac{1}{5}$ выражается конечной дробью, а $\frac{1}{6}$ — бесконечной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= 0,2_{10}, \\ \frac{1}{6} &= 0,16666\dots_{10}. \end{aligned}$$

В двенадцатеричной системе¹ дело будет обстоять наоборот: $\frac{1}{5}$ выразится бесконечной дробью, а $\frac{1}{6}$ — конечной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &= 0,249724972497\dots_{12}, \\ \frac{1}{6} &= 0,2_{12}. \end{aligned}$$

Число же $\frac{1}{4}$ выразится в обеих системах конечной дробью:

$$\frac{1}{4} = 0,25_{10} = 0,3_{12},$$

а число $\frac{1}{7}$ — в обеих системах — бесконечной:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots_{10} = 0,186035186035\dots_{12}.$$

¹ О двенадцатеричной системе и используемых в ней цифрах сказано в § 3.

Рассмотрим теперь вопрос о переводе дробей из одной системы счисления в другую. При этом необходимо иметь в виду сделанное выше замечание о возможности получения бесконечных дробей.

Для перевода восьмеричной дроби в десятичную систему можно, как и для целых чисел, воспользоваться тем, что восьмеричная дробь есть представление числа в виде суммы степеней $\frac{1}{8}$ с коэффициентами. Поэтому, например,

$$0,2754_8 = 2 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4.$$

Но $\frac{1}{8} = 0,125_{10}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} 0,2754_8 &= 2 \cdot 0,125 + 7 \cdot 0,125^2 + 5 \cdot 0,125^3 + 4 \cdot 0,125^4 = \\ &= 0,250 + 0,109375 + 0,009765625 + 0,0009765625 = \\ &= 0,3701171875_{10}. \end{aligned}$$

Воспользоваться этой же идеей для перевода десятичной дроби в восьмеричную значительно труднее не только потому, что придется производить вычисления в восьмеричной системе, но еще и потому, что число $0,1_{10}$ не выражается в виде конечной восьмеричной дроби; выражение $0,1_{10}$ в восьмеричной системе бесконечно:

$$0,1_{10} = 0,631463146314 \dots_8.$$

Перевод десятичной дроби в восьмеричную может быть получен более простым путем. Пусть дана десятичная дробь $0,423828125$, которую нужно перевести в восьмеричную систему.

Чтобы найти первую после запятой цифру восьмеричной дроби, нужно узнать, сколько восьмых содержится в заданном числе. Но для этого можно поступить так: предварительно умножить заданное число на восемь и узнать, сколько целых содержится в полученном произведении. Так как

$$0,423828125 \times 8 = 3,390625000,$$

то целая часть произведения содержит 3 единицы, а стало быть, само данное число содержало три восьмых. Иначе говоря, первой после запятой восьмеричной цифрой числа будет цифра 3.

Следующую цифру — количество шестьдесят четвертых — можно получить так: вычестъ из данного числа три

восьмых (т. е. 0,375) и умножить оставшееся на 64. Но тот же результат получится, если из уже подсчитанного произведения на 8 вычесть целую часть и результат снова помножить на 8. Проделав это, получаем:

$$0,390625 \times 8 = 3,125000,$$

откуда следует, что вторая цифра нашей восьмеричной дроби тоже 3.

Тем же путем, вычитая из произведения целую часть и снова умножая на 8, получаем еще одну цифру восьмеричной дроби. Это будет 1, так как

$$0,125 \times 8 = 1,000.$$

Дробная часть произведения равна нулю; это показывает, что перевод закончен и мы получили равенство

$$0,423828125_{10} = 0,331_8.$$

Нужные вычисления удобно располагать в виде приведенной ниже схемы, в которой рассматривается перевод в восьмеричную систему десятичной дроби 0,4560546875.

$$\begin{array}{r}
 0,4560546875 \\
 \times 8 \\
 \hline
 3,6484375000 \\
 \times 8 \\
 \hline
 5,1875000 \\
 \times 8 \\
 \hline
 1,5000 \\
 8 \\
 \hline
 4,0
 \end{array}$$

В результате вычислений получили восьмеричную дробь 0,3514. Напомним, что каждый раз в умножении на 8 участвует *только дробная часть числа*. Целые части, расположенные слева от вертикальной черты, в вычислениях не участвуют и дают требуемые восьмеричные цифры в нужном порядке.

Если требуется перевести десятичную дробь в позиционную систему с другим основанием, то правило перевода остается тем же, только умножать надо не на восемь, а на другое основание, записанное в десятичной системе.

Приведенные выше примеры подобраны так, чтобы получающаяся восьмеричная дробь была конечной. Как уже

отмечалось, при переводе конечной десятичной дроби в восьмеричную может получиться и бесконечная дробь. Переведем, например, в восьмеричную систему десятичную дробь 0,73125:

$$\begin{array}{r}
 0,73125 \\
 \times 8 \\
 \hline
 5,85000 \\
 \times 8 \\
 \hline
 6,80 \\
 \times 8 \\
 \hline
 6,4 \\
 \times 8 \\
 \hline
 3,2 \\
 \times 8 \\
 \hline
 1,6 \\
 \times 8 \\
 \hline
 4,8 \\
 \times 8 \\
 \hline
 6,4 \\
 \dots
 \end{array}$$

Итак, мы получаем бесконечную периодическую дробь $0,73125_{10} = 0,56\ 6314\ 6314\ \dots_8$.

Сформулируем еще раз общее правило: для перевода целого числа в восьмеричную систему счисления его надо последовательно делить на 8, а при переводе дроби, меньшей единицы, — последовательно умножать на 8. Цифрами восьмеричного числа будут последовательные остатки, записанные в обратном порядке, или целые части, записанные в порядке их получения.

Если число является смешанным, то целую и дробную части надо переводить в восьмеричную систему отдельно. Например, если требуется перевести в восьмеричную систему число 940,6875, то получаем:

$$\begin{array}{r|l}
 940 & 8 \\
 \hline
 14 & 117 \\
 \hline
 60 & 37 \\
 \hline
 \boxed{4} & \boxed{5}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 & 8 \\
 \hline
 & 14 \\
 \hline
 & 6 \\
 \hline
 & \boxed{1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0,6875 \\
 \times 8 \\
 \hline
 \boxed{5},5000 \\
 \times 8 \\
 \hline
 \boxed{4},0000,
 \end{array}$$

т. е. $940,6875_{10} = 1654,54_8$.

Упражнения

22. Переведите в десятичную систему дроби $0,256_8$, $0,444_8$ и $0,777_8$.

23. Два числа, меньше единицы, записаны одними и теми же цифрами в различных позиционных системах счисления. Определите, какое из этих чисел больше.

24. Переведите в восьмеричную систему десятичные дроби $0,4375$; $0,484375$; $0,7421875$.

25. Переведите в восьмеричную систему числа $982,34375$ и $176,3125$.

26. Докажите, что всякая конечная восьмеричная дробь при переводе в десятичную систему останется конечной. Справедливо ли обратное утверждение?

27. Каким условиям должны удовлетворять дроби, которые записываются в виде конечной десятичной? Конечной восьмеричной?

28*. Ответьте на тот же вопрос для произвольной позиционной системы с основанием n .

§ 7. Зачем нужны различные позиционные системы?

Надо полагать, что вопрос, поставленный в заголовке этого параграфа, занимал читателя довольно давно. Действительно, преимущества позиционной системы перед непозиционными, вроде римской, достаточно очевидны. А вот есть ли преимущества у одной позиционной системы перед другой? Почему нельзя ограничиться рассмотрением и использованием одной, обычной и привычной десятичной системы, а надо изучать еще системы с другим основанием?

Позиционные системы с различными основаниями используются для изучения свойств чисел уже не одну сотню лет. Например, с помощью записи целых чисел в различных системах можно получать признаки делимости. Рассмотрение некоторых других вопросов теории делимости также облегчается использованием недесятичных позиционных систем.

Однако все эти вопросы занимали лишь сравнительно небольшой круг людей, главным образом специалистов в области так называемой высшей арифметики — *теории чисел*. Пока это было так, никакой надобности в широком знакомстве с различными системами счисления не было.

Но положение изменилось с момента возникновения и широкого распространения вычислительных машин.

Конструкция цифровых вычислительных машин тесно связана с принятой системой счисления.

Простейшим цифровым вычислительным устройством являются хорошо известные *русские счеты*. В них для изображения числа используются спицы с надетыми на них косточками. Количество спиц соответствует количеству разрядов, отведенных для изображения числа. Каждая спица может находиться в различных состояниях, определяемых количеством опущенных косточек. Так как в десятичной системе имеется десять различных цифр, то для их изображения нужно иметь десять различных состояний. Для этого на каждую спицу надевают десять косточек.

Другим примером цифровой вычислительной машины является арифмометр. Здесь для изображения различных цифр в каждом разряде используется зубчатая шестеренка. Окружность колесика, из которого эта шестеренка сделана, разбивается на 10 частей. На каждой такой части имеется зубец шестеренки. Поворачиваясь вокруг своей оси, шестеренка может останавливаться только в таких положениях, когда какой-либо ее зубец устанавливается против окошка в корпусе арифмометра. На каждом зубце шестеренки написана соответствующая цифра.

У некоторых цифровых машин для изображения числа используются специальные ступенчатые валики, однако и в этом случае на валике должны быть те же десять ступенек.

Рассмотренные примеры показывают, что применяемая для записи чисел позиционная система счисления предъявляет свои требования к конструкции вычислительных машин: десять косточек на спице, десять зубцов на шестеренке и десять ступенек на валике объясняются тем, что число изображается в десятичной системе счисления. Чтобы изображать число в десятичной системе, надо пользоваться элементами, имеющими десять различных устойчивых состояний.

Впрочем, при пользовании такими механическими элементами учесть требования системы счисления и удовлетворить им очень легко, и поэтому можно сказать, что конструкция такой машины позволяет иметь дело с любой системой счисления. Если бы, например, нужно было

изображать числа не в десятичной, а в восьмеричной системе, то на счетах нужно было бы тогда на каждую спицу надеть по восемь косточек, а на шестеренке арифмометра сделать по восемь зубцов. Ясно, что это не труднее, чем сделать по десять.

Но совсем иначе будет обстоять дело, если мы перейдем к использованию других элементов — электромеханических или электронных. Для этих элементов характерно естественное определенное число устойчивых состояний. Например, обычный выключатель или, более сложно, электромеханическое реле может быть замкнуто или разомкнуто, конденсатор — заряжен или разряжен, электронная лампа может проводить или не проводить ток.

Итак, для электромеханических и электронных элементов характерно наличие двух различных устойчивых состояний. Их применение для изображения чисел в вычислительных машинах требует поэтому такой системы счисления, в которой имеются лишь две различные цифры. Такой является *двоичная система счисления*, т. е. позиционная система счисления с основанием два. Здесь мы видим, что «конструкция машины» (точнее, элементы, в ней применяемые) предъявляет требования к системе счисления.

Кроме удобства изображения чисел с помощью электронных элементов, двоичная система обладает рядом преимуществ при выполнении арифметических действий, что также оказывается полезным при конструировании машин. Более того, оказывается, что двоичная система является одной из наиболее экономных в смысле требуемого числа устойчивых состояний всех элементов.

По всем этим причинам современные электронные вычислительные машины обычно работают в двоичной системе счисления. Рассмотрению свойств и особенностей этой системы посвящен следующий параграф.

§ 8. Двоичная система счисления. Двоичная арифметика

Двоичная система счисления есть позиционная система с основанием два. Для изображения чисел в этой системе требуется лишь две цифры: 0 и 1. Основание двоичной системы, число *два*, изображается в этой системе как 10.

Прибавляя к этому числу единицу, мы получим 11, что есть двоичная запись числа *три*. Прибавляя еще единицу, мы должны будем сделать перенос во второй, а затем и в третий разряд, что дает двоичное изображение числа *четыре* — 100.

Выражение первых чисел натурального ряда в двоичной системе показано в приведенной таблице.

<i>Десятичные числа</i>	<i>Двоичные числа</i>
-------------------------	-----------------------

1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010
19	10011
20	10100
25	11001
50	110010
100	1100100
200	11001000

Из этой таблицы видно, что запись числа в двоичной системе значительно длиннее десятичной записи. Так, двузначное десятичное число 19 записывается пятью двоичными разрядами, а 50 — даже шестью, однозначное в десятичной системе число 8 требует в двоичной системе четырех разрядов и т. п. Рассматривая различные примеры, легко убедиться в том, что для записи произвольного целого числа в двоичной системе требуется в среднем вдвое больше разрядов, чем в десятичной. Поэтому при

обычном ручном счете двоичная система неудобна и невыгодна.

Может показаться, что требование большего числа разрядов увеличивает количество требуемого для машины оборудования. Но это не так, поскольку для машины существенно не количество разрядов, а общее количество устойчивых состояний всех элементов, используемых для изображения числа. В этом смысле двоичная система оказывается даже значительно более экономной, чем десятичная.

Например, для изображения целых чисел от 1 до 999 в десятичной системе достаточно трех разрядов, т. е. трех элементов. Поскольку каждый элемент может находиться в десяти различных состояниях, то общее число требуемых состояний равно тридцати. В двоичной системе для тех же чисел потребуется уже десять элементов, так как $999_{10} = 1111100111_2$, но каждый элемент имеет лишь по два состояния, поэтому общее число требуемых состояний в двоичной системе будет равно лишь двадцати.

Существует и еще более экономичная в этом смысле позиционная система — троичная. Если для записи целых чисел от 1 до 10^9 в десятичной системе требуется 90 различных состояний, а в двоичной — 60, то в троичной лишь 57.

Троичная система счисления не получила широкого распространения по причинам не математического, а физического характера — вследствие трудностей осуществления надежных физических элементов с тремя устойчивыми состояниями. Но машины, работающие в троичной системе, имеются. Это электронная машина «Сетунь», сконструированная в Московском университете.

Арифметические действия в двоичной системе производятся по обычным правилам, общим для всех позиционных систем. Таблица сложения однозначных чисел в двоичной системе имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0, & 1 + 0 = 1, \\ 0 + 1 = 1, & 1 + 1 = 10. \end{array}$$

Сложение двух многозначных чисел выглядит так:

$$\begin{array}{r} 1011100101 \\ + 10111100 \\ \hline 1110100001 \end{array}$$

Аналогично производится и сложение дробных чисел; например,

$$\begin{array}{r} + \quad 10011,0101 \\ \quad 1101,0111 \\ \hline 100000,1100 \end{array}$$

Если слагаемых много, то в некоторых разрядах может оказаться несколько единиц переноса. В таких случаях их удобнее не держать «в уме», а выписывать сверху над соответствующими разрядами. Сложение четырех слагаемых будет тогда выглядеть так:

$$\begin{array}{r} \quad 111 \quad 1111 \\ \quad 111111111 \quad 1 \\ \hline 101100111,01 \\ + \quad 10111011,10 \\ \quad 1100001,01 \\ \quad 11001111,11 \\ \hline 1101010011,11 \end{array}$$

Таблица умножения в двоичной системе предельно проста. Так как умножение на нуль всегда дает нуль, то в таблице умножения остается лишь одна строка

$$1 \times 1 = 1.$$

Но умножение на единицу не меняет числа. Поэтому умножение многозначных чисел в двоичной системе сводится лишь к сдвигу и сложению; никакого другого счета здесь не требуется. При многозначных множителях с большим числом единиц между множителями и частичными произведениями удобно оставлять свободное место для записи единиц переноса при сложении.

Приведем два примера на умножение:

$$\begin{array}{r} \times \quad 11011 \\ \quad 100,1 \\ \hline 11011 \\ + 11011 \\ \hline 1111001,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \quad 111001101 \\ \quad 1110001 \\ \hline \quad 11 \quad 11 \\ \quad 111111111 \\ \hline \quad 111001101 \\ + \quad 111001101 \\ \quad 111001101 \\ \hline 1100101101111101 \end{array}$$

В первом из них без записи единиц переноса легко было обойтись.

Обратные действия — вычитание и деление — выполняются так же просто и по таким же правилам. Например,

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{— } 1101001101 \\
 \phantom{\text{— }} 11100110 \\
 \hline
 1001100111
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{— } 10101110001111 \\
 \phantom{\text{— }} 11011 \\
 \hline
 100001 \\
 \text{— } 11011 \\
 \hline
 110000 \\
 \phantom{\text{— }} 11011 \\
 \hline
 101011 \\
 \phantom{\text{— }} 11011 \\
 \hline
 100001 \\
 \phantom{\text{— }} 11011 \\
 \hline
 11011 \\
 \phantom{\text{— }} 11011 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11011 \\
 \overline{) 110011101} \\
 \underline{110011101}
 \end{array}
 \end{array}$$

С помощью специального приема вычитание можно упростить, сведя его к сложению. Для этого нужно воспользоваться понятием двоичного дополнения.

Двоичным дополнением данного положительного двоичного числа называют такое положительное двоичное число, которое, будучи сложено с данным, дает в сумме число, равное единице некоторого разряда. Например, для числа 101 двоичным дополнением будет 11, так как

$$101 + 11 = 1000.$$

Для числа 111 двоичным дополнением будет 1, а для числа 1011101 — число 100011, так как

$$\begin{array}{r}
 + 1011101 \\
 + 100011 \\
 \hline
 10000000
 \end{array}$$

Двоичное дополнение аналогично дополнению до круглого числа, которым мы пользуемся при устных действиях в десятичной системе счисления. Например, если нужно в уме произвести вычитание $632 - 78$, то можно, воспользовавшись тем, что $78 = 100 - 22$, производить его так:

$$632 - (100 - 22) = 632 + 22 - 100 = 554,$$

что, конечно, гораздо проще, чем непосредственное вычитание числа 78. Число 22 является здесь *десятичным дополнением* до «совсем круглого» числа 100, с которым легко производить действия.

Чтобы получить дополнение числа 78 до ста, нужно произвести вычитание $100 - 78 = 22$, которое легко выполнить в уме. Двоичное дополнение числа также можно получить вычитанием этого числа из ближайшего «круглого», т. е. из единицы старшего разряда, однако здесь это действие выполнить уже сложнее. Тем большее значение имеет следующее правило, позволяющее найти двоичное дополнение более просто.

Рассмотрим двоичные дополнения для нескольких пятизначных и шестизначных двоичных чисел:

число	11101	дополнение	00011 = 00010 + 1
	10111		01001 = 01000 + 1
	111100		000100 = 000011 + 1
	111010		000110 = 000101 + 1

На этих примерах мы замечаем правило, которое можно применять во всех случаях: *для получения двоичного дополнения нужно в данном числе заменить все нули единицами, а единицы нулями, после чего прибавить к полученному числу единицу младшего разряда.* Нули в начале числа, естественно, можно опускать.

Пользуясь двоичным дополнением, можно заменить вычитание сложением. Именно, вместо того чтобы вычесть данное число, достаточно прибавить его двоичное дополнение, а затем вычесть единицу того разряда, до которого дополнение производилось.

Пусть, например, требуется произвести вычитание $1110101100 - 1000111010$. Двоичное дополнение вычитаемого по приведенному выше правилу равно:

$$\begin{array}{r} 0111000101 \\ + \quad \quad \quad 1 \\ \hline 0111000110 \end{array}$$

Прибавляя его к уменьшаемому, находим:

$$\begin{array}{r} 1110101100 \\ + 0111000110 \\ \hline 10101110010 \end{array}$$

Остается заметить, что дополнение производилось до одиннадцатого разряда, и поэтому самую левую единицу в полученной сумме нужно вычесть, т. е. просто опустить. Искомая разность будет равна 101110010 (мы опустили и еще один ноль впереди старшей единицы числа). Легко проверить прямым вычитанием, что результат получился верным.

Перевод чисел из двоичной системы в десятичную и обратно можно выполнять по тем же правилам, которые были рассмотрены в § 5 для целых и в § 6 для дробных чисел.

Например,

$$\begin{aligned} 11011011,1101_2 &= \\ &= 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \\ &= 219,8125_{10}. \end{aligned}$$

Для обратного перевода из десятичной системы в двоичную целую часть делим на 2, а дробную — умножаем. Например, для числа 235,53125 находим:

235	2									0, 53125
<u>1</u>	<u>117</u>	2								<u>1, 06250</u>
	<u>1</u>	<u>58</u>	2							<u>1, 06250</u>
		<u>0</u>	<u>29</u>	2						<u>0, 1250</u>
			<u>1</u>	<u>14</u>	2					<u>0, 1250</u>
				<u>0</u>	<u>7</u>	2				<u>0, 250</u>
					<u>1</u>	<u>3</u>	2			<u>0, 250</u>
						<u>1</u>	<u>1</u>	2		<u>0, 50</u>
								<u>2</u>		<u>1, 0</u>

Таким образом, $235,53125_{10} = 11101011,10001_2$.

С более коротким способом перевода в двоичную систему, основанном на использовании восьмеричной системы, мы познакомимся в следующем параграфе.

Упражнения

29. Выполните указанные действия в двоичной системе:

$$\begin{array}{rcl} \text{а) } 1110001010,01 & \text{б) } 1100011101 \times 1100011 & \\ + 11101110,00 & \text{в) } 1110010111001 : 10011 & \\ \hline & 111101,11 & \end{array}$$

30. Проверьте правильность решения предыдущих задач, переведя все числа в десятичную систему и выполнив в ней нужные действия.

31. Произведите вычитание

$$1000110111 - 1100111$$

непосредственно и с помощью двоичного дополнения.

32. При каких условиях обыкновенная дробь выразится конечной двоичной дробью?

33*. Выведите правило для получения десятичного дополнения, аналогичное приведенному правилу для получения двоичного. Объясните оба эти правила.

§ 9. Смешанные системы счисления

Если представить число в какой-либо системе счисления, а затем каждую цифру этого числа записать в другой системе, то мы получим запись числа в *смешанной системе счисления*. Практически используются двоично-десятичная и двоично-восьмеричная системы.

В *двоично-десятичной системе* число представляется в обычной десятичной форме, а затем каждая десятичная цифра записывается в двоичной системе. При этом различные десятичные цифры требуют для своего двоичного написания различного числа двоичных разрядов, от одного для нуля и единицы, до четырех для восьми и девяти. Чтобы не нужно было применять никаких разделительных знаков, для двоичного изображения десятичной цифры в двоично-десятичной системе всегда выделяются четыре двоичных разряда. Такая группа из четырех двоичных разрядов, предназначенная для изображения одной десятичной цифры, называется *тетрадой*¹.

¹ Тетрада в переводе с греческого означает «четверка».

Десятичное число требует для своего изображения в двоично-десятичной форме столько тетрад, каково количество десятичных разрядов числа. Например, число 3842 в двоично-десятичной системе будет иметь вид:

0011 1000 0100 0010.

Здесь для удобства чтения тетрады записаны с промежутками между ними. На самом деле все цифры могут быть поставлены рядом. Более того, нули впереди или в конце после запятой могут быть опущены. Надо только помнить, что каждая группа состоит из четырех разрядов и они считаются влево и вправо от запятой. Например, двоично-десятичная запись 11100100000010,01011 разбивается на тетрады так:

0011 1001 0000 0010, 0101 1000

и означает, следовательно, десятичное число 3902,58. Разбивая число на тетрады, мы приписали два нуля слева и три справа.

Из возможных шестнадцати различных тетрад 0000, 0001, 0010, ..., 1110, 1111 в двоично-десятичной системе используются только первые десять; остальные тетрады не означают никакой десятичной цифры и поэтому не имеют смысла в двоично-десятичной системе. По этой причине арифметические операции в двоично-десятичной системе затруднительны.

Например, при сложении $56 + 23$ в двоично-десятичной системе можно действовать так же, как и в двоичной. Мы получаем:

$$\begin{array}{r} 01010110 \\ + 00100011 \\ \hline 01111001, \end{array}$$

т. е. 79 в десятичной системе. Если же нужно складывать $56 + 25$, то сложение в двоичной системе дает

$$\begin{array}{r} 01010110 \\ + 00100101 \\ \hline 01111011, \end{array}$$

где последняя тетрада не имеет смысла в двоично-десятичной системе. Сумма, равная 81, должна в двоично-десятичной системе иметь вид 10000001.

Как видно из приведенного примера, к выполнению арифметических действий над числами двоично-десятичная система плохо приспособлена. Тем не менее она широко используется для записи чисел и вот по каким причинам.

Электронные вычислительные машины, как об этом уже говорилось в § 7, работают в двоичной системе счисления. Для записи чисел в них применяются элементы, имеющие два различных устойчивых состояния. Одно из них принимается за обозначение нуля, другое — единицы. Например, число, записанное в каком-либо устройстве машины, выводится на пульт управления. Здесь для изображения двоичных разрядов числа применяются неоновые лампочки; зажженная лампочка изображает цифру 1, а потухшая — цифру 0.

Между тем исходные данные для счета на машине, естественно, всегда представляются в десятичном виде, и их может быть слишком много для того, чтобы вручную переводить все числа в двоичную систему. Записать же десятичное число непосредственно в устройство машины нет никакой возможности, так как соответствующие элементы имеют лишь два состояния.

Тут-то и приходит на помощь двоично-десятичная система. Десятичные числа переводятся в двоично-десятичный вид, а затем уже в самой машине двоично-десятичные числа переводятся в двоичные.

Перевод десятичных чисел в двоично-десятичные совершается чисто механически. Ввод чисел в машину производится путем пробивки отверстий (перфорации) на специальных картах или ленте, причем пробивки носят тоже двоичный характер: наличие отверстия в определенном месте воспринимается как единица, а отсутствие его — как нуль. Машина для такой пробивки — перфоратор — устроена так, что при нажатии клавиши с десятичной цифрой она автоматически пробивает в нужном месте соответствующую тетраду.

Аналогично двоично-десятичной системе *двоично-восьмеричная* форма записи числа состоит в том, что число переводится в восьмеричную систему, а затем каждая восьмеричная цифра записывается в двоичном виде. Так как наибольшая цифра в восьмеричной системе есть 7, то для изображения любой восьмеричной цифры достаточно трех разрядов. Такая группа из трех двоичных

разрядов, отведенная для изображения восьмеричной цифры, называется *триадой*¹.

Восьмеричное число 7256, например, запишется в двоично-восьмеричной форме четырьмя триадами 111010101110.

В отличие от тетрад, используемых в двоично-десятичной системе, в двоично-восьмеричной все возможные триады используются. Это обстоятельство составляет преимущество двоично-восьмеричной системы. Другим, и самым важным, ее преимуществом является то, что *двоично-восьмеричная запись числа совпадает с его двоичной записью*.

Убедимся в справедливости этого утверждения на примерах. Пусть дано число 2736_{10} . Переведем его в двоичную систему:

$$\begin{array}{r}
 2736 \quad | 2 \\
 \hline 0 \quad 1368 \quad | 2 \\
 \hline 0 \quad 684 \quad | 2 \\
 \hline 0 \quad 342 \quad | 2 \\
 \hline 0 \quad 171 \quad | 2 \\
 \hline 1 \quad 85 \quad | 2 \\
 \hline 1 \quad 42 \quad | 2 \\
 \hline 0 \quad 21 \quad | 2 \\
 \hline 1 \quad 10 \quad | 2 \\
 \hline 0 \quad 5 \quad | 2 \\
 \hline 1 \quad 2 \quad | 2 \\
 \hline 0 \quad 1
 \end{array}$$

Получаем двоичное число 101010110000_2 . При переводе этого же числа в восьмеричную систему получим:

$$\begin{array}{r}
 2736 \quad | 8 \\
 \hline 0 \quad 342 \quad | 8 \\
 \hline 6 \quad 42 \quad | 8 \\
 \hline 2 \quad 5
 \end{array}$$

т. е. восьмеричное число 5260. Записав это восьмеричное число в двоично-восьмеричной форме, получим 101010110000, что совпадает с полученным выше двоичным представлением.

¹ Триада в переводе с греческого означает «тройка».

Утверждение остается справедливым и для дробных чисел. Рассмотрим еще один пример: десятичное число 167,6875. Для перевода в восьмеричную систему целую часть делим, а дробную умножаем на 8:

$$\begin{array}{r}
 167 \quad | \quad 8 \\
 \hline
 7 \quad 20 \quad | \quad 8 \\
 \quad \quad 4 \quad 2 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0,6875 \\
 | \times 8 \\
 \hline
 5,5000 \\
 | \times 8 \\
 \hline
 4,0
 \end{array}$$

Получаем $167,6875_{10} = 247,54_8$. Отсюда двоично-восьмеричная запись будет 010100111,101100. Непосредственный перевод в двоичную систему дает

$$\begin{array}{r}
 167 \quad | \quad 2 \\
 \hline
 1 \quad 83 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad 1 \quad 41 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad \quad 1 \quad 20 \quad | \quad 2 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \quad 10 \quad | \quad 2 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad 5 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad 2 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0,6875 \\
 | \times 2 \\
 \hline
 1,3750 \\
 | \times 2 \\
 \hline
 0,750 \\
 | \times 2 \\
 \hline
 1,50 \\
 | \times 2 \\
 \hline
 1,0
 \end{array}$$

т. е. $10100111,1011_2$, что совпадает с двоично-восьмеричной записью, с точностью до опущенных нулей в начале и в конце записи числа.

Можно доказать и общую теорему о том, что двоично-восьмеричная форма числа всегда совпадает с двоичной, но мы не станем на этом останавливаться, указав только, что причиной такого совпадения является равенство $8 = 2^3$. Вместе с тем это совпадение является причиной использования восьмеричной системы для работы с электронными машинами.

Записываемое в машине двоичное число обычно бывает очень велико, а человеку иметь дело с длинным набором одних только нулей и единиц затруднительно. Для сокращения записи двоичное число разбивают на триады, а затем каждую триаду заменяют соответствующей восьмеричной цифрой. Иначе говоря, считают, что данное

двоичное число является на самом деле двоично-восьмеричным.

От такого преобразования число становится втрое короче, его запись — значительно более разнообразной, в результате чего облегчается переписывание и уменьшается вероятность описок и просчетов. Восьмеричную систему удобно также использовать для ручного перевода чисел в двоичную систему. Для этого сначала переводят десятичное число в восьмеричную систему, что много проще и короче, чем сразу в двоичную, а затем каждую восьмеричную цифру заменяют соответствующей триадой.

§ 10. Двоичный сумматор

В заключение остановимся коротко на том, каким образом в электронной вычислительной машине выполняются арифметические действия.

Основным арифметическим действием, выполняемым машиной, является сложение. Действительно, умножение в двоичной системе сводится к сдвигам множимого и нескольким сложениям. Вычитание сводится к сложению путем перехода к двоичному дополнению. Деление выполняется путем последовательного вычитания, т. е. опять-таки сводится к сложениям.

Поэтому *основным элементом арифметического устройства машины является многоразрядный двоичный сумматор, осуществляющий сложение двух двоичных чисел*. В свою очередь, многоразрядный сумматор может быть составлен из одnorазрядных сумматоров, каждый из которых предназначен для сложения цифр одного разряда. Количество таких одnorазрядных двоичных сумматоров определяется числом разрядов, отведенных для записи двоичного числа в данной машине.

Двоичный одnorазрядный сумматор должен иметь *три входа*: на два из них поступают значения соответствующих разрядов двух слагаемых, а третьим является возможный перенос из младшего разряда. *Выходов* у этого сумматора должно быть *два*: один из них — сумма, которая должна получиться в данном разряде, а второй — возможный перенос в старший разряд.

Сумматор должен работать так, чтобы он, получая на своих входах произвольную комбинацию нулей и единиц,

давал на выходе вполне определенные значения, зависящие от входных данных. Например, если у первого слагаемого в данном разряде стоит цифра нуль, а у второго — единица и имеется единица переноса из младшего разряда в данный, то двоичный одноразрядный сумматор должен выдать в качестве значения суммы в этом разряде нуль и единицу переноса из данного разряда в старший, поскольку $0 + 1 + 1 = 10$.

Все три входа в двоичном одноразрядном сумматоре равноправны, и значения выходов определяются не тем, что подается на те или иные входы, а общим числом единиц, поданных на входы одноразрядного сумматора.

Работа двоичного одноразрядного сумматора может быть описана приведенной ниже таблицей. При этом через A и B мы обозначили входы, на которые подаются цифры соответствующего разряда первого и второго слагаемых, через S — выход, содержащий цифру данного разряда в сумме, а через Z_1 и Z_2 — переносы соответственно из младшего разряда в данный (вход) и из данного разряда в старший (выход).

Таблица работы одноразрядного двоичного сумматора

Входы			Выходы	
A	B	Z_1	S	Z_2
0	0	0	}	0
1	0	0		}
0	1	0		
0	0	1		
1	1	0	}	}
1	0	1		
0	1	1		
1	1	1		

Проследим подробнее с помощью приведенной таблицы, как осуществляется сложение на двоичном одноразрядном сумматоре.

Если обе складываемые цифры равны нулю, т. е. у обоих слагаемых в рассматриваемом разряде стоит цифра нуль и, кроме того, отсутствует перенос из младшего

разряда в данный, то после сложения в этом разряде суммы должен находиться нуль и перенос в старший разряд не образуется. Этот случай соответствует первой строке нашей таблицы: все цифры на входе равны нулю ($A = B = 0$ — цифры двух слагаемых, $Z_1 = 0$ — перенос из младшего разряда в данный) и цифры на выходе также нули ($S = 0$ — значение суммы в данном разряде, $Z_2 = 0$ — перенос из данного разряда в старший).

Следующие три строки таблицы объединяют случаи, когда из трех входов сумматора лишь на одном из них имеется единица, а на двух оставшихся — нули. Это может быть в том случае, когда одно из слагаемых имеет в данном разряде цифру 1, а другое — 0 ($A = 1, B = 0$ либо $A = 0, B = 1$) и отсутствует перенос из младшего разряда в данный ($Z_1 = 0$) или же обе цифры у слагаемых — нули, но имеется единица переноса ($A = B = 0, Z_1 = 1$). Во всех этих случаях в данном разряде образуется сумма $S = 1$, а перенос в старший разряд не образуется, т. е. $Z_2 = 0$.

На входы двоичного одноразрядного сумматора могут быть поданы две единицы и один нуль. Это случится, если цифры данного разряда обоих слагаемых равны единицам, но переноса из младшего разряда в данный нет ($A = B = 1, Z_1 = 0$) или перенос есть ($Z_1 = 1$), но одна из цифр слагаемых равна единице, а другая нулю ($A = 1, B = 0$ либо $A = 0, B = 1$). Во всех этих случаях мы будем получать сумму 10, т. е. цифра суммы в данном разряде должна быть нулем, $S = 0$, и образуется единица переноса в старший разряд $Z_2 = 1$.

Наконец, в последней строке таблицы приведен случай, когда на все три входа подаются единицы, т. е. и оба слагаемых имеют в данном разряде единицы ($A = B = 1$), и, кроме того, имеется единица переноса из младшего разряда в данный ($Z_1 = 1$). Здесь получается сумма $1 + 1 + 1 = 11$, так что и цифра суммы в данном разряде будет $S = 1$ и образуется единица переноса в старший разряд $Z_2 = 1$.

Электронных или других схем, позволяющих осуществить работу сумматора в соответствии с приведенной таблицей, мы рассматривать не станем. Они требуют знакомства с основными понятиями математической логики и, строго говоря, не являются математическими вопросами.

Ответы к упражнениям

1. 5, 25, 625, 3125.
2. 10 и 100.
3. В двенадцатеричной.
4. В семеричной; не существует, потому что равенство $2 \times 3 = 11$ справедливо лишь в пятеричной системе, в которой не может быть $2 + 3 = 5$, поскольку в ней нет цифры 5.
5. В любой (позиционной).
6. $10_5 = 5$, $20_5 = 10$, $30_5 = 15$, $40_5 = 20$,
 $100_5 = 25$, $200_5 = 50$, $300_5 = 75$, $400_5 = 100$.
8. Круглое число должно делиться на n , а совсем круглое — на n^2 .
9. Бóльшим будет число, записанное в системе с бóльшим основанием.
10. У четного числа, записанного в троичной системе, количество единиц среди цифр должно быть четным.
11. Если основание системы n четное, то число будет четным тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой. Если основание нечетное, то для четности числа количество нечетных цифр в его записи должно быть четным.
12. 8, 64, 512, 4096.
13. 10, 100, 1000, 10 000.
14. Таблица сложения в восьмеричной системе:

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

15. Таблица умножения в восьмеричной системе

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

17. а) 1000; б) 264; в) 1527; г) 144; д) 15 123.

18. 3938, 1933, 1548.

19. 27 345, 21 127, 14 314.

20. $16\,244 + 18\,565 = 34\,809$, $11\,513 - 7731 = 3782$,
 $9788 + 6881 + 25\,672 + 12\,670 = 55\,011$, $10\,878 \times 860 =$
 $= 9\,355\,080$, $8\,400\,267 : 621 = 13\,527$.

21. $20\,621_8 = 8593_{10}$. Нужно производить последовательное деление на 12 в восьмеричной системе. Остатки 10 и 11 заменяются соответственно цифрами 8 и 9.

22. 0,33 984 375; 0,5 703 125; 0,998 046 875.

23. Большей является дробь, записанная в системе с меньшим основанием.

24. $0,231\,463\,146\dots_8$; $0,37_8$; $0,574_8$.

25. $1726,26_8$; $260,24_8$.

27. Обыкновенная дробь выражается конечной десятичной, если разложение ее знаменателя на простые множители не содержит других множителей, кроме 2 и 5. Дробь выражается конечной восьмеричной, если ее знаменатель есть степень двух.

28. Дробь выражается конечной в системе счисления с основанием n , если простые делители ее знаменателя являются делителями основания системы.

29. а) 10 011 110 110,10; б) 1 001 101 000 011 011;
 в) 110 000 011.

31. 10 110 100.

32. Знаменатель дроби есть степень двух.

Несколько методических указаний для учителя

Факультативный курс «Системы счисления и арифметические основы работы электронных вычислительных машин» рассчитан на 12 часов. Предполагается, что § 1, 2 послужат материалом для рассказа учителя на первом уроке и упражнений не потребуют.

Для § 3 вместе с задачами достаточно, видимо, 1 часа. Материал § 4, 5 полезно равномерно распределить на три урока. Для домашних заданий можно подобрать самостоятельно задачи, аналогичные приведенным упражнениям. Необходимо только иметь в виду, что главный упор следует делать на восьмеричную систему и стараться выбирать не слишком большие числа. Вполне достаточно ограничиться четырехзначными восьмеричными числами, но все же очень хотелось бы, чтобы по крайней мере сложение и вычитание в этих пределах были усвоены учащимися достаточно прочно.

Дроби (§ 6) требуют вместе с упражнениями двух часов. Здесь также следует уделить главное внимание восьмеричной системе. Далее, оба часа посвящаются двоичной системе и двоичной арифметике. Из них нужно выделить около получаса на рассказ преподавателя по материалу § 7, разумеется, без всяких упражнений.

На смешанные системы можно отвести 1—2 часа. Здесь полезно сделать несколько задач следующего типа: арифметические действия в двоично-десятичной и двоично-восьмеричной системах; перевод из двоичной системы в десятичную и обратно через посредство восьмеричной системы. Такие задачи легко составить самостоятельно. Наконец, 1 час потребуется на рассказ преподавателя о двоичном сумматоре. Автор полагает, что школьникам достаточно объяснить, что сумматор есть такое устройство, которое, получая определенные цифры на входе, выдает по определенным правилам другие цифры на выходе. Нужно подробно разобрать эти правила, но разбирать, каким путем эти действия осуществляются технически, на данном уровне не следует.

Л и т е р а т у р а:

Берман Г. Н. Число и наука о нем, Физматгиз, 1960.

Гутер Р. С. Машинная математика и элементы программирования. В сб. «О некоторых вопросах современной математики и кибернетики», «Просвещение», 1965.

Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств, «Просвещение», 1965.

Фомин С. В. Системы счисления, «Наука», 1964.

Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Резниковский П. Т. Программирование и вычислительная математика, «Наука», 1965.

Гутер Р. С., Резниковский П. Т., Резник С. М. Программирование и вычислительная математика, вып. 1, «Наука», 1971.

§ 1. Понятие множества

Понятие множества, подобно понятиям точки, числа и т. д., не сводится к другим понятиям математики и не определяется. Вместо определения этого понятия приведем примеры. Можно говорить о множестве всех учеников данной школы, о множестве всех людей на Земле, о множестве всех клеток человеческого тела, о множестве всех картофелин на картофельном поле, о множестве всех треугольников на плоскости, множестве целых чисел, множестве всех точек данного квадрата и т. д.

Когда в математике говорят о множестве, то объединяют некоторые предметы или понятия в одно целое — множество, состоящее из этих предметов. Основатель теории множеств Георг Кантор (1845—1918) выразил это следующими словами:

«Множество есть многое, мыслимое, как единое».

Предметы (объекты), составляющие некоторое множество, называются его *элементами*. То обстоятельство, что объект x является элементом множества A , записывают так: $x \in A$ (читается: x есть элемент множества A , или x принадлежит A , или x содержится в A , или A содержит x). Если объект x не является элементом A , то это записывают так: $x \notin A$ (читается: x не есть элемент множества A , или x не принадлежит A , или x не содержится в A , или A не содержит x).

Например, если A есть множество всех четных натуральных чисел, то $2 \in A$, $1024 \in A$, а $7 \notin A$, $\frac{3}{4} \notin A$, $\text{слон} \notin A$ и т. д.

Упражнения

1. Какие названия применяются для обозначения множеств животных?

2. Как называется множество артистов, работающих в одном театре?

3. Как называется множество людей, идущих 1 Мая по Красной площади?

4. Какие названия применяют для обозначения множеств военнослужащих?

5. Какие названия применяют для обозначения множеств кораблей?

6. Как называется множество цветов, стоящих в вазе?

7. Как называется множество царей (фараонов, императоров и т. д.) данной страны, принадлежащих одному семейству?

8. Как называется множество точек земной поверхности, равноудаленных от Северного полюса?

9. Как называется множество точек земной поверхности, имеющих одинаковую долготу?

10. Как называется множество точек земной поверхности, имеющих заданную среднюю годовую температуру?

11. Как называется множество точек земной поверхности, равноудаленных от обоих полюсов?

12. Коза привязана веревкой длиной l к колечку, которое может скользить по веревке, натянутой между колышками A и B . Каково множество точек луга, до которых может дотянуться коза?

13. Пусть A — множество делителей числа 60. Верна ли запись $7 \in A$? Верна ли запись $10 \in A$? Верна ли запись $20 \notin A$? Составьте список элементов множества A .

14. Пусть A — множество корней квадратного уравнения

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Верна ли запись $3 \in A$? Верна ли запись $-5 \in A$? Верна ли запись $10 \notin A$? Верна ли запись $4 \notin A$? Составьте список элементов множества A .

15. Пусть A — множество всех многочленов от одной переменной x , все коэффициенты которых целые.

Верна ли запись $x^2 - 15x + 6 \in A$? Верна ли запись $x^3 + y^3 - 1 \in A$? Верна ли запись $\frac{3}{4}x^3 - 1 \notin A$? Верна ли запись $\frac{7}{6}x^2 - 5 \in A$?

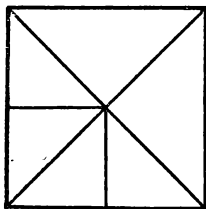


Рис. 1

16. Пусть A — множество всех треугольников. Перечислите геометрические фигуры на рисунке 1, принадлежащие этому множеству. Из скольких элементов состоит множество треугольников на рисунке 1?

Множество иногда можно задать перечислением его элементов. Например, множество стран на земном шаре задается их списком в географическом атласе, множество учеников — их списком в классном журнале, множество слов, использованных А. С. Пушкиным в его произведениях, — их списком в «Словаре пушкинского языка». Если множество задано списком, то употребляются фигурные скобки, в которые помещают названия всех элементов множества, разделенные запятыми. Так, $\{1, 2, 3\}$ обозначает множество, состоящее из чисел один, два, три и только из них.

Но не все же множества можно задать списком. Если множество содержит бесконечно много элементов, то такой список составить нельзя. Множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называется *характеристическим свойством множества*. Одно и то же множество может быть задано различными характеристическими свойствами.

Например, множество $\{2, 4\}$ может быть задано как:

а) множество четных чисел, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 5$;

б) множество корней квадратного уравнения

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Задание множества его характеристическим свойством применяется в геометрии. В геометрии множество точек, обладающих данным характеристическим свойством, часто называют *геометрическим местом точек с данным свойством*. Например, биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, лежащих внутри этого угла и равноудаленных от его сторон.

Множество элементов, обладающих данным характеристическим свойством, обозначают так: пишут фигурные скобки, в них — обозначение элемента множества, после

него — двоеточие, а потом — характеристическое свойство. Например, запись

$$A = \{x: -3 \leq x \leq 4\}$$

означает, что множество A состоит из всех чисел x , удовлетворяющих неравенству $-3 \leq x \leq 4$. А запись

$$A = \{M: F_1M + F_2M = 10\}$$

означает, что множество A состоит из всех точек M плоскости, таких, что сумма расстояний F_1M и F_2M равна 10.

Упражнения

17. Составьте список элементов множества, заданных характеристическим свойством:

а) $A = \{x: x^2 - 8x + 15 = 0\}$;

б) $A = \{x: x \in N, -11 < x \leq -3\}$;

в) $A = \{x: x^4 - 10x^2 + 9 = 0\}$;

г) $A = \{x: x \in N, -1 \leq x \leq 7\frac{1}{3}\}$ (N — множество натуральных чисел).

18. Опишите множества точек M на плоскости, таких, что:

а) $\{M: OM = R\}$;

б) $\{M: OM \leq R\}$;

в) $\{M: \angle AOM = \angle MOB\}$;

г) $\{M: AM = BM\}$;

д) $\{M: AM = BM = CM\}$.

19. В следующих множествах все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Найдите элементы, не обладающие этим свойством:

а) $\{2, 6, 15, 84, 156\}$;

б) $\{2, 7, 13, 16, 29\}$;

в) $\{1, 9, 25, 67, 121\}$;

г) $\{\text{треугольник, квадрат, трапеция, круг, правильный шестиугольник}\}$;

д) $\{\text{жираф, аист, корова, барсук, собака}\}$;

- е) {лев, лисица, гиена, слон, рысь};
 ж) {бежать, смотреть, знать, синий, смеяться};
 з) {Москва, Харьков, Гомель, Казань, Иркутск}.

Рассмотрим множество, заданное следующим образом:

$$A = \left\{ x : x = \frac{n^2}{n^2 + 16}, n \in N \right\}.$$

Это множество состоит из всех чисел, которые можно представить дробью вида $\frac{n^2}{n^2 + 16}$, где n — любое натуральное число. Например, $\frac{1}{2} \in A$, так как $\frac{1}{2} = \frac{4^2}{4^2 + 16}$. А $\frac{1}{3} \notin A$, так как при любом натуральном n имеем: $\frac{n^2}{n^2 + 16} \neq \frac{1}{3}$. В самом деле, предположим, что $\frac{n^2}{n^2 + 16} = \frac{1}{3}$. Решая это уравнение, получим, что $n = \pm 2\sqrt{2}$. Ясно, что n не является натуральным числом.

Упражнения

20. Исследуйте, принадлежат ли числа $\frac{2}{5}, \frac{17}{20}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}$ множеству $A = \left\{ x : x = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 4}, n \in N \right\}$.

21. Напишите пять чисел, принадлежащих множеству $A = \left\{ x : x = \frac{n^3 + 7}{n^3 + 15}, n \in N \right\}$.

22. Угадайте, по какому закону составлено бесконечное множество, содержащее числа¹:

а) $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \dots \right\};$

б) $\left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{6}{11}, \frac{8}{14}, \dots \right\};$

¹ Следует иметь в виду, что для любого конечного множества чисел можно придумать сколько угодно «законов» составления множества, содержащего эти числа. Например, числа 1, 4, 9, 16, 25, ... принадлежат как множеству $\{n^2, n \in N\}$, так и множеству $\{n^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5), n \in N\}$. Здесь речь идет об угадывании «самого естественного» закона, хотя дать строгое математическое определение этому понятию невозможно.

в) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots\right\}$;

г) $\{2, 12, 36, 80, 150, \dots\}$.

23. На рисунке 2 слева изображены фигуры, обладающие некоторым характеристическим свойством, а справа — фигуры, обладающие другим характеристическим свойством. Угадайте, в чем состоят эти свойства.

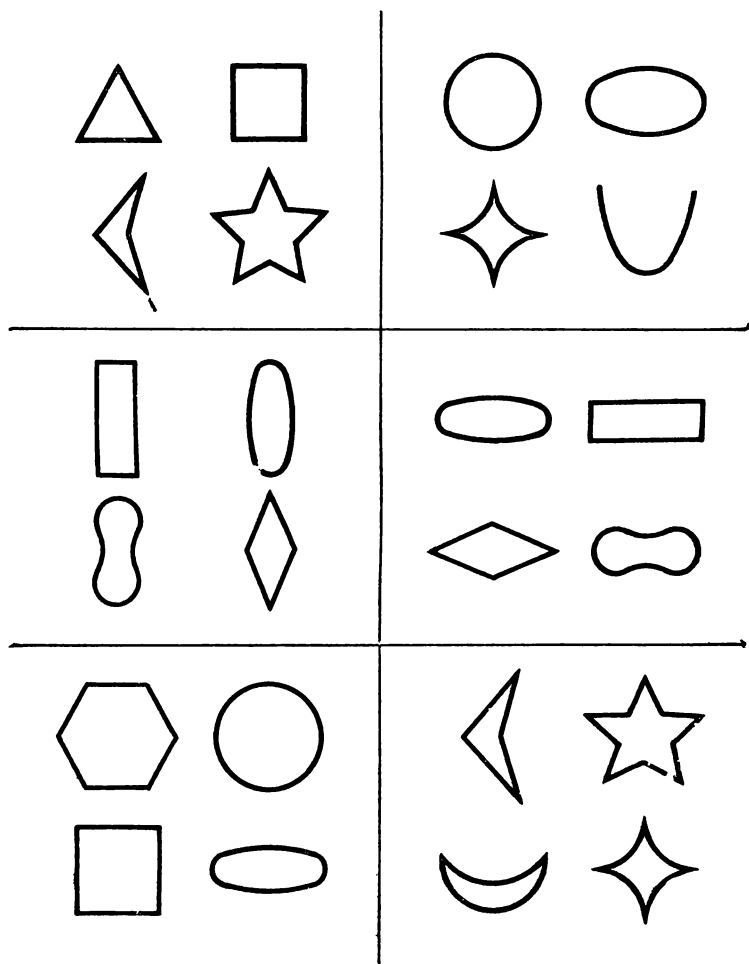


Рис. 2

§ 2. Пустое множество

Множество, не имеющее ни одного элемента, называют *пустым множеством*. Примерами могут служить:

а) множество точек пересечения двух параллельных прямых;

б) множество треугольников, сумма углов которых отлична от 180° ;

в) множество квадратных уравнений, имеющих более двух различных корней;

г) множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 6x + 8y = 12; \end{cases}$$

д) множество прямоугольных треугольников, у которых сумма квадратов катетов не равна квадрату гипотенузы;

е) множество шестиногих собак;

ж) множество пятилетних гроссмейстеров.

Фактически во всех этих примерах речь идет об одном и том же множестве: пустое множество единственно — нет разных пустых множеств. Пустое множество обозначается так: \emptyset .

О некоторых множествах до сих пор неизвестно, пусты они или нет. Так, до сих пор неизвестно, пусто ли множество натуральных чисел n , таких, что $n > 2$, а уравнение $x^n + y^n = z^n$ имеет положительные целочисленные решения (в этом состоит известная проблема Ферма). Неизвестно, пусто ли множество цифр, встречающихся лишь конечное число раз в десятичном разложении числа π .

Упражнения

24. Укажите среди следующих множеств пустое:

а) множество прямоугольников с неравными сторонами;

б) множество прямоугольников с неравными диагоналями;

в) множество треугольников, медианы которых не пересекаются в одной точке;

г) множество целых корней уравнения $4x^2 - 1 = 0$;

д) множество натуральных корней уравнения $2x^2 - 3x - 9 = 0$.

25. Сформулируйте теорему Пифагора как теорему о пустоте некоторого множества.

26. Изложите теорему о вписанных в круг четырехугольниках как теорему о пустоте некоторого множества.

27. Сформулируйте тождество $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ как утверждение о пустоте некоторого множества.

§ 3. Числовые множества

Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, атомы, числа, уравнения, точки, углы и т. д. Именно этим объясняется чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к самым разнообразным областям знания (математике, физике, лингвистике, экономике и т. д.). Для математики особо важную роль играют множества, составленные из «математических» объектов — чисел, геометрических фигур и т. д. Очень часто встречаются числовые множества, т. е. множества, элементами которых являются числа. Примерами числовых множеств являются:

- а) множество всех рациональных чисел;
- б) множество всех положительных рациональных чисел;
- в) множество всех натуральных чисел;
- г) множество всех целых чисел;
- д) множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-4 \leq x \leq 8$;

е) множество всех чисел вида $\left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}$, где n принимает все натуральные значения.

Некоторые числовые множества имеют особые названия. Если даны два числа a и b , $a < b$, то множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называют *числовым отрезком* или, если это не вызывает недоумений, просто *отрезком* и обозначают $[a; b]$. На числовой оси ему соответствует отрезок с концами a и b (см. рис. 3).

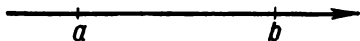


Рис. 3

Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называют *числовым промежутком* или, короче, *промежутком* и обо-

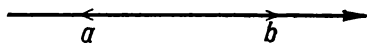


Рис. 4

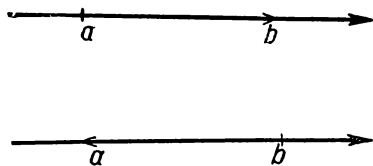


Рис. 5

значают (a, b) . На числовой оси это множество изображается отрезком, у которого отброшены концевые точки (см. рис. 4).

Иногда нам будут встречаться множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$ (рис. 5). Их на-

зывают (числовыми) *полуотрезками* и обозначают $[a; b)$, или $(a; b]$. Квадратная скобка означает, что соответствующий конец включается в множество, а круглая, что он исключается.

Числовые отрезки, полуотрезки и промежутки имеют конечную длину. Рассмотрим теперь множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a \leq x < +\infty$. Такое множество называется *числовым лучом*. Числовой луч имеет бесконечную длину. Числовыми лучами называют и множества чисел, удовлетворяющих неравенствам вида $a < x < +\infty$, $-\infty < x \leq a$, $-\infty < x < a$.

Числовые лучи обозначают так: $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; a)$.

С числовыми множествами приходится иметь дело при решении уравнений и неравенств. С каждым уравнением связаны два числовых множества. Первое из них — *область определения* уравнения. Это множество состоит из всех значений x , для которых имеют смысл обе части уравнения. Например, область определения уравнения

$$\sqrt{25 - x^2} = \frac{4}{x - 2} \quad (1)$$

задается условиями $25 - x^2 \geq 0$ (квадратный корень в множестве действительных чисел можно извлечь лишь из неотрицательного числа) и $x \neq 2$ (на нуль делить нельзя). Отсюда получаем, что область определения данного уравнения состоит из всех точек числового отрезка $[-5; 5]$, кроме точки $x = 2$.

Второе множество, связываемое с уравнением, — это множество его корней, т. е. чисел, при подстановке которых в уравнение оно обращается в тождество.

Например, для уравнения (1) множество корней состоит из одного числа 3.

Упражнения

28. Найдите область определения уравнения:

а) $x^2 + 5x + 7 + \frac{1}{x^3 - x} = 1 + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x}$;

б) $x^2 + b^2 + \frac{1}{x^2 - 4a^2} = 0$;

в) $\sqrt{100 - x^2} = 3 + \sqrt{x^2 - 25}$;

г) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 + \sqrt{16 - x^2}$.

29. Найдите область определения и множество корней уравнения:

а) $\frac{12x+1}{6x-2} - \frac{9x-5}{3x+1} = \frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$;

б) $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}$;

в) $\frac{x+4}{2x^2-8x+6} - \frac{x-3}{2-2x^2} = \frac{x+6}{x^3-3x^2-x+3}$;

г) $\frac{x+5}{2x^2+6x-8} + \frac{x-7}{64-4x^2} + \frac{9}{x^3-x^2-16x+16} = 0$;

д) $\frac{14}{20-6x-2x^2} + \frac{x^2+4x}{x^2+5x} - \frac{x+3}{2-x} + 3 = 0$.

30. Совпадают ли области определения уравнений:

а) $x+5=15-x$ и $x+5+\sqrt{x}=15-x+\sqrt{x}$;

б) $x+1=0$ и $(x+1)\sqrt{x-1}=0$;

в) $\sqrt{(x-6)(x-1)} = \sqrt{14}$ и $\sqrt{x-6}\sqrt{x-1} = \sqrt{14}$;

г) $x^2-1=0$ и $\sqrt{x^2-1}=0$?

31. Совпадают ли множества корней пар уравнений а) — г) из упражнения 30?

Два уравнения называются равносильными на некотором множестве A , если множества корней этих уравнений, принадлежащие множеству A , совпадают (в частности, если оба множества пусты).

Рассмотрим, например, уравнения

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (2)$$

и

$$(9x^2 - 1)(x^2 - 3x + 2) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) имеет корни 1 и 2, а уравнение (3) корни

$1, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$. Так как множества $\{1, 2\}$ и $\{1, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ различны, то уравнения (2) и (3) неравносильны на множестве действительных чисел. Но если нам нужны лишь натуральные значения x (например, если по условию задачи x обозначает число рабочих в бригаде), то условию задачи будут удовлетворять лишь корни 1 и 2 второго уравнения. Множество этих корней совпадает с множеством корней первого уравнения. Иными словами, уравнения (2) и (3) равносильны на множестве N натуральных чисел.

Иногда требуют, чтобы равносильные уравнения не только имели одно и то же множество корней, но и чтобы каждый корень имел одну и ту же кратность в обоих уравнениях. Мы не налагаем это требование и считаем, например, уравнения $x-1=0$ и $(x-1)^2=0$ равносильными.

Упражнения

32. Обозначим через N множество натуральных чисел, через Z — множество всех целых чисел, через Q — множество всех рациональных чисел, через Q_+ — множество всех положительных рациональных чисел, через Q_- — множество всех отрицательных рациональных чисел.

Исследуйте, на каких из этих множеств равносильны уравнения:

а) $x^2 - 6x + 9 = 0$ и $\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{x(x+2)}$;

б) $x^2 + 6x = 0$ и $|2x - 7| - |4x + 5| = 2$;

в) $x^2 - 6x + 8 = 0$ и $|1 - x| - |x - 2| - |x - 3| = 0$.

§ 4. Множества точек на плоскости

Множества точек на плоскости часто задают их характеристическими свойствами. Например, окружность — множество точек плоскости, расстояние которых от данной точки O (центра окружности) равно числу R (радиусу окружности). А круг — множество точек M плоскости, расстояние которых от данной точки плоскости (центра

круга) не превосходит числа R , $OM \leq R$. Если вместо неравенства $OM \leq R$ взять неравенство $OM < R$, то получим другое множество — множество, состоящее из всех точек круга, исключая точки граничной окружности. Это множество называют *открытым кругом*.

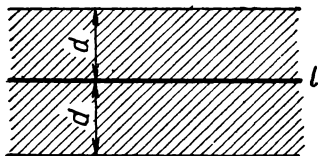


Рис. 6

Множество точек плоскости, расстояние которых от прямой l не превосходит d , есть множество точек полосы, ограниченной двумя прямыми, параллельными прямой l и отстоящими от нее на расстояние d (рис. 6). А множество точек плоскости, расстояние которых от прямой l меньше d , — это открытая полоса, в которую не включаются граничные прямые.

Укажем еще некоторые множества точек на плоскости. Возьмем на плоскости две точки A и B . Множество точек M этой плоскости, для которых $\frac{AM}{MB} = k$ при $k \neq 1$, является окружностью. В самом деле, проведем в треугольнике AMB внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла M (рис. 7). По свойствам этих биссектрис имеем:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{MB} = k \text{ и } \frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB} = k.$$

Иными словами, для всех точек M , удовлетворяющих условию $\frac{AM}{MB} = k$, точки C и D пересечения биссектрис с прямой AB будут одними и теми же. Но угол между внутренней и внешней биссектрисами прямой: $\angle CMD = d$. Поэтому точка M лежит на окружности с диаметром CD . Эта окружность называется *окружностью Аполлония* (древнегреческий математик, живший во II веке до н. э.).

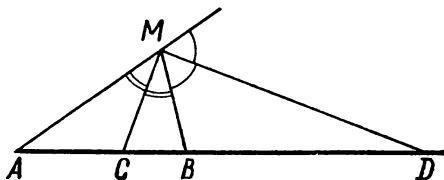


Рис. 7

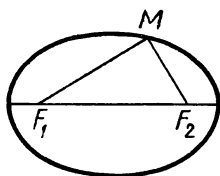


Рис. 8

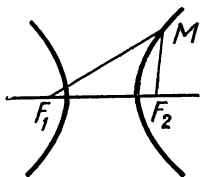


Рис. 9

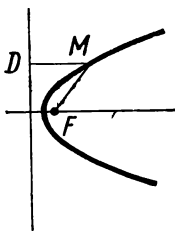


Рис. 10

А теперь возьмем все точки M на плоскости, для которых сумма расстояний до двух заданных точек F_1 и F_2 той же плоскости равна $2a$: $MF_1 + MF_2 = 2a$. Это множество точек называется *эллипсом*, а точки F_1 и F_2 — *фокусами эллипса* (рис. 8). Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце. Точки, для которых $MF_1 + MF_2 < 2a$, лежат внутри эллипса, а точки, для которых $MF_1 + MF_2 > 2a$, лежат вне эллипса.

Если же вместо суммы мы возьмем разность расстояний, то получим другую кривую — *гиперболоу*. Гипербола — это множество точек на плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 той же плоскости есть величина постоянная, равная $2a$: $|F_1M - F_2M| = 2a$ (рис. 9). Точки F_1 и F_2 называют *фокусами гиперболы*.

Наконец, рассмотрим третью любопытную кривую — *параболу*. Параболой называют геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки F (*фокуса параболы*) и от прямой l — *директрисы параболы* (рис. 10).

Упражнения

33. Как начертить эллипс, имея две кнопки, нить и карандаш?

34. Как начертить часть параболы, имея линейку, угольник, две кнопки, нить и карандаш?

35. Как с помощью циркуля и линейки получить несколько точек эллипса?

36. Как с помощью циркуля и линейки получить несколько точек гиперболы?

37. Как с помощью циркуля и линейки получить несколько точек параболы?

38. Во что переходит эллипс, если точки F_1 и F_2 сливаются в одну точку?

39. Во что переходит эллипс, если $F_1F_2 = 2a$?

40. Во что переходит гипербола, если $a = 0$?

41. Во что переходит гипербола, если $F_1F_2 = 2a$?

42. Во что переходит параболу, если точка F лежит на прямой l ?

43. Пусть в точках A и B находятся звукометрические батареи.

Звук выстрела орудия дошел до батареи A на a сек раньше, чем до батареи B . Укажите множество точек, в которых может находиться это орудие, если скорость распространения звука в воздухе равна $\frac{1}{3}$ км/сек, а звук слышен на расстоянии b км.

44. Пусть на железнодорожной линии AB в точках A и B расположены станции. Чтобы попасть из точки M на станцию A ,

турист может либо идти на станцию B , а оттуда ехать поездом до станции A , либо прямо идти на станцию A . Скорость движения туриста равна v_1 км/ч, скорость поезда равна v_2 км/ч, расстояние AB равно a км. Укажите множество точек, из которых выгоднее сначала пойти на станцию B (временем ожидания поезда пренебречь).

Множества точек на плоскости часто задают соотношениями между их координатами. Пусть на плоскости выбрана система координат. Тогда любое уравнение с двумя переменными $F(x, y) = 0$ задает множество точек на плоскости, а именно множество точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Например, точка $M(-3; 4)$ принадлежит множеству, заданному уравнением $x^2 + y^2 = 25$. В самом деле, $(-3)^2 + 4^2 = 25$. А точка $N(1; 6)$ не принадлежит этому множеству, так как $1^2 + 6^2 \neq 25$.

Мы знаем из школьного курса уравнения некоторых линий. Так, $y = kx + b$ — это уравнение прямой с угловым коэффициентом k , отсекающей от оси ординат отрезок величины b . А $y = x^2$ — уравнение параболы с вершиной в точке $O(0; 0)$, осью которой является ось ординат. Вообще, любое уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

— это уравнение параболы, ось которой параллельна оси ординат. Вершина этой параболы находится в точке

$$A\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Выведем формулу для расстояния между двумя точками плоскости $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Из прямоугольного треугольника M_1AM_2 (рис. 11) видно, что $M_1M_2^2 = M_1A^2 + AM_2^2$. Но $M_1A = M_1'A'$. Так как абсцисса точки M_1 равна x_1 , а абсцисса точки A' равна x_2 , то расстояние между точками M_1' и A' равно $|x_2 - x_1|$, $M_1'A' = |x_2 - x_1|$. Но тогда $M_1A^2 = (M_1'A')^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$. Точно так же доказывается, что $AM_2^2 = (y_2 - y_1)^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} M_1M_2^2 &= M_1A^2 + AM_2^2 = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

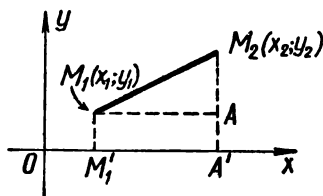


Рис. 11

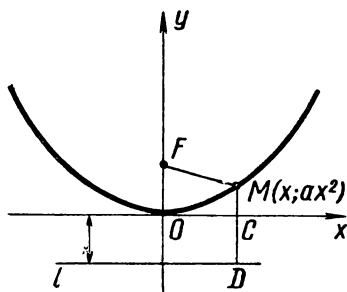


Рис. 12

Возьмем теперь на параболе $y = ax^2$ ($a > 0$) точку $M(x; ax^2)$. Ее расстояние от точки $F(0; \frac{1}{4a})$ равно (рис. 12):

$$MF = \sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = ax^2 + \frac{1}{4a},$$

а от прямой $l: y = -\frac{1}{4a}$ ее расстояние равно

$$MD = MC + CD = y + \frac{1}{4a} = ax^2 + \frac{1}{4a}.$$

Итак, $MF = MD$, т. е. точка M равноудалена от точки F и от прямой l . Обратно, если некоторая точка $M(x; y)$ равноудалена от F и l , то

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2} = y + \frac{1}{4a},$$

откуда после простых преобразований получаем, что $y = ax^2$. Тем самым доказано, что *множество точек M , равноудаленных от точки F и прямой l , совпадает с множеством точек параболы $y = ax^2$.*

Найдем еще уравнение окружности. Пусть центр окружности находится в точке $A(a; b)$, а ее радиус равен R . Тогда для любой точки $M(x; y)$, лежащей на окружности (и только для этих точек), имеем $MA = R$. Но тогда $AM^2 = R^2$.

По формуле (1) для расстояния между точками получаем, что

$$AM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

и потому

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (2)$$

Итак, мы доказали, что для всех точек $M(x; y)$ нашей окружности, и только для этих точек, выполняется уравнение (2). Это и есть уравнение окружности. Например, уравнение окружности с центром $A(3; -4)$ и радиусом 7 имеет вид:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 7^2.$$

Упражнения

45. Найдите расстояние между точками:

- а) $A(3; 1)$ и $B(7; -2)$;
- б) $A(1; 6)$ и $B(6; -6)$;
- в) $A(-1; 2)$ и $B(6; -22)$.

46. Найдите на оси ординат точку M , равноудаленную от начала координат и от точки $A(3; 12)$.

47. Найдите уравнение множества точек $M(x; y)$, равноудаленных от точки $F(2; 1)$ и от прямой $y = -1$.

48. Найдите уравнение множества точек $M(x; y)$, равноудаленных от точки $F(1; -2)$ и от прямой $x = 2$.

49. Найдите центр и радиус окружности:

- а) $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 9$;
- б) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 25$;
- в) $x^2 + y^2 = 100$.

50. Напишите уравнение окружности, если:

а) центр находится в точке $A(-1; 2)$, а радиус равен 5;

б) центр находится в точке $A(3; 1)$ и окружность проходит через точку $B(7; 4)$;

в) окружность проходит через точки $A(4; 6)$ и $B(-2; -2)$, а ее радиус равен 5;

г) окружность описана вокруг треугольника ABC , где $A(9; 2)$, $B(7; 6)$, $C(0; -1)$;

д) для всех ее точек выполняется условие $AM : BM = 2$, где $A(0; 0)$, $B(6; 0)$.

Если раскрыть в уравнении окружности скобки, получим уравнение

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \quad (3)$$

где для краткости положено $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Обратно, уравнение вида (3), вообще говоря, выражает окружность. Например, возьмем уравнение

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

Выделяя полные квадраты, получаем из него

$$\begin{aligned}(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) &= 25, \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 5^2.\end{aligned}$$

Значит, это уравнение является уравнением окружности с центром $A(2; -3)$ и радиусом 5.

Рассмотрим еще уравнение

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0.$$

После выделения полных квадратов получим:

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0.$$

Это уравнение «окружности нулевого радиуса с центром в точке $A(5; -2)$ ». Иными словами, этому уравнению удовлетворяют координаты только одной точки — точки A .

А уравнение

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 30 = 0$$

приводится к виду

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = -1.$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости. Оно задает пустое множество.

Упражнения

51. Найдите центр и радиус следующих окружностей:

- а) $x^2 + y^2 + 6y = 0$;
- б) $x^2 + y^2 - 10x + 2y = 10$;
- в) $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 20 = 0$;
- г) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$;
- д) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 34 = 0$;
- е) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$.

Уравнение $F(x, y) = 0$, как правило, задает на плоскости линию. Эта линия разбивает плоскость на несколько частей. В одних из этих частей выполняется неравенство $F(x, y) < 0$, а в других — неравенство $F(x, y) > 0$.

Например, прямая $y = 2x + 1$ разбивает плоскость на две части. В одной из этих частей мы имеем $y > 2x + 1$, а в другой имеем $y < 2x + 1$. Первая часть состоит из точек, лежащих выше прямой $y = 2x + 1$, а вторая — из точек, лежащих ниже этой прямой (рис. 13).

Далее мы знаем, что

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

— уравнение окружности радиуса 5. Она разбивает плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю области. Во внутренней части X имеем:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 < 25$$

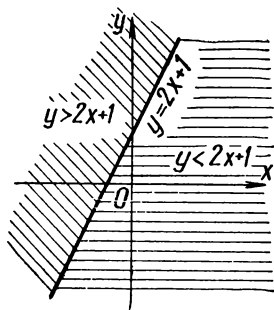


Рис. 13

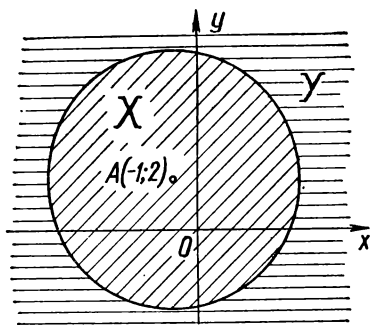


Рис. 14

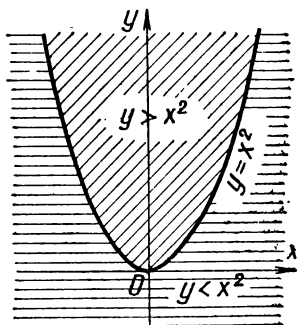


Рис. 15

(ведь $(x+1)^2 + (y-2)^2$ — это квадрат расстояния точки $M(x; y)$ от точки $A(-1; 2)$, и для внутренних точек он меньше, чем 25). Для точек же внешней области Y имеем:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 > 25.$$

Окружность является общей границей множеств X и Y (рис. 14).

Точно так же $y = x^2$ — это уравнение параболы. А неравенство $y > x^2$ задает множество точек $M(x; y)$, у которых ордината y больше ординаты соответствующей точки параболы, т. е. точек, лежащих выше параболы. Итак, неравенство $y > x^2$ задает множество точек плоскости, лежащих выше параболы $y = x^2$ (рис. 15). А неравенство $y < x^2$ задает множество точек плоскости, лежащих ниже параболы $y = x^2$. Парабола является общей границей этих двух множеств.

Упражнения

52. Опишите множество точек $M(x; y)$ плоскости, для которых:

- а) $y \geq 3x - 2$;
- б) $(x-4)^2 + (y-1)^2 \leq 36$;
- в) $y \leq x^2 - 6x + 1$;
- г) $|y| > |x+1|$.

53. Чем отличаются друг от друга множества, задаваемые неравенствами $y < x^2 - 6x + 1$ и $y \leq x^2 - 6x + 1$?

К какому из этих двух множеств принадлежит точка $A(8; 17)$?

54. Каким уравнением задается граница множества точек $M(x; y)$, для которых $|y| < 4x - 2$?

55. Найдите границу множества, заданного неравенством

$$y \geq x^2 - 2x + 4.$$

Иногда бывает так, что область на плоскости задается уравнением. Возьмем уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = x + y.$$

Его можно записать так:

$$\sqrt{(x+y)^2} = x + y,$$

или иначе

$$|x+y| = x+y.$$

Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $x+y \geq 0$, т. е. $y \geq -x$. Значит, данное уравнение задает множество точек на плоскости, лежащих на прямой $y = -x$ и выше этой прямой.

Упражнения

56. Какие множества задаются уравнениями:

а) $\sqrt{y^2 - 4x^2y + 4x^4} = y - 2x^2$;

б) $\sqrt{y^2 - 4x^2y + 4x^4} = 2x^2 - y$;

в) $\sqrt{y^2 - 4x^2y + 4x^4} = 1$;

г) $\sqrt{y^2 - 4x^2y + 4x^4} = y - 4x$?

Рассматривают, конечно, и множества точек в пространстве. Например, сфера — это множество точек M , удаленных от заданной точки A на расстояние R .

Упражнения

57. Опишите следующие множества точек в пространстве:

а) множество точек M , для которых $AM \leq R$;

б) множество точек M , для которых $AM < R$;

в) множество точек, удаленных от плоскости P на расстояние d ;

г) множество точек, расстояние которых от плоскости P не превосходит d ;

д) множество точек, расстояние которых от плоскости P меньше d ;

е) множество точек, удаленных от прямой l на расстояние d ;

ж) множество точек, расстояние которых от прямой l меньше d ;

з) множество точек, расстояние которых от точки A больше R ;

и) множество точек, расстояние которых от прямой l не меньше d ;

к) множество точек, расстояние которых от плоскости P больше d .

§ 5. Подмножества

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A , то говорят, что B — подмножество в A , и пишут $B \subset A$. Каждое непустое множество имеет по крайней мере два подмножества: пустое множество \emptyset и само множество A . Таким образом, пустое множество является подмножеством любого множества.

Приведем примеры подмножеств:

а) числовой отрезок $[-1; 3]$ есть подмножество числового отрезка $[-4; 5]$;

б) множество всех квадратов есть подмножество множества всех прямоугольников;

в) множество Z всех целых чисел есть подмножество множества Q всех рациональных чисел;

г) множество точек треугольника, вписанного в круг, есть подмножество множества точек этого круга;

д) множество точек круга является подмножеством множества точек описанного вокруг него квадрата;

е) множество звезд нашей Галактики является подмножеством множества всех звезд вселенной;

ж) множество учеников восьмого класса данной школы есть подмножество множества всех учеников этой школы. В свою очередь множество учеников этой школы является подмножеством множества всех школьников в СССР;

з) множество жителей Москвы является подмножеством множества всех жителей Советского Союза;

и) множество советских граждан является подмножеством множества всех людей на земном шаре.

Упражнения

58. Даны множества:

а) множество A всех трапеций; б) множество B всех прямоугольников; в) множество C всех четырехугольников; г) множество D всех квадратов; д) множество E всех параллелограммов; е) множество F всех многоугольников. Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая обозначала подмножество предыдущего.

59. Даны множества:

а) множество A всех рациональных чисел; б) множество B всех целых чисел; в) множество C всех действительных чисел; г) множество D всех четных натуральных чисел; д) множество E всех натуральных чисел; е) множество F всех натуральных чисел, делящихся на 12. Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая буква обозначала подмножество предыдущего множества.

60. Даны множества:

а) множество A учеников VIII класса данной средней школы;

б) множество B всех учеников данной средней школы;

в) множество C учеников VIII класса этой средней школы, посещающих факультативные занятия по математике;

г) множество D всех учащихся средних школ в СССР;

д) множество E всех учащихся средних школ в городе, где находится данная школа;

е) множество F мальчиков из VIII класса, посещающих факультативные занятия по математике.

Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая буква обозначала подмножество предыдущего множества.

61. Даны множества:

а) множество A всех позвоночных животных;

б) множество B всех животных;

в) множество C всех млекопитающих животных;

г) множество D всех волков;

д) множество E всех хищных млекопитающих.

Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая следующая буква обозначала подмножество предыдущего множества.

Пусть конечное множество A содержит n элементов. Подсчитаем, сколько подмножеств имеет это множество. Множество, состоящее из одного элемента a , имеет два подмножества: пустое множество \emptyset и множество $\{a\}$. Если множество A содержит два элемента a и b , то число подмножеств у же равно 4:

$$\emptyset, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}.$$

Мы видим, что множества во втором столбце получаются из множеств в первом столбце добавлением элемента b . Точно так же, если множество A содержит 3 элемента a, b, c , то число его подмножеств равно 8, среди них уже найденные 4 подмножества, не содержащие элемента c : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$. Прибавляя к каждому из них элемент c , получим еще 4 подмножества: $\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Ясно, что множество из 4 элементов имеет 16 подмножеств, множество из 5 элементов — 32 подмножества, вообще множество из n элементов имеет 2^n подмножеств.

Подсчитаем, сколькими способами можно разделить 10 различных предметов между двумя людьми. Все определяется тем, какие предметы получит первый участник раздела. Эти предметы образуют некоторое подмножество всего множества предметов. Так как число таких подмножеств равно $2^{10} = 1024$, то число способов раздела равно 1024.

§ 6. Пересечение множеств

На рисунке 16 прямые MN и PQ пересекаются в точке R .

Эта точка принадлежит как прямой MN , так и прямой PQ , т. е. является общим элементом двух множеств — множества точек прямой MN и множества точек прямой PQ . Точно так же множество точек прямой MN и множество точек окружности Γ (рис. 17) имеют два общих элемента — точку A и точку B . Прямая и окружность пересекаются в двух точках.

Введем теперь общее понятие пересечения нескольких множеств. *Пересечением* множеств A и B называют новое

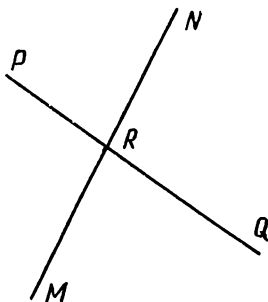


Рис. 16

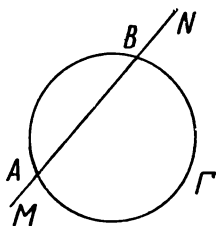


Рис. 17

множество X , содержащее те и только те элементы, которые входят и в множество A и в множество B .

Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$ или AB . Например, если A — множество мальчиков, обучающихся в данной школе, а B — множество всех учеников из VIII класса, то $A \cap B$ — множество мальчиков, которые учатся в VIII классе.

С понятием пересечения множеств приходится иметь дело и в арифметике. Пусть A — множество натуральных делителей числа 72:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

а B — множество натуральных делителей числа 54:

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}.$$

Тогда множество $A \cap B$ состоит из чисел 1, 2, 3, 6, 9, 18:

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Эти числа являются общими делителями для 72 и 54. Наибольший элемент множества $A \cap B$ равен 18. Это — *наибольший общий делитель* чисел 54 и 72.

Множество делителей числа 72 конечно. А множество кратных этого числа бесконечно:

$$C = \{72, 144, 216, \dots, 72n, \dots\}.$$

Бесконечно и множество кратных числа 54:

$$D = \{54, 108, 162, 216, \dots, 54m, \dots\}.$$

Пересечением этих множеств является множество общих кратных для чисел 72 и 54:

$$C \cap D = \{216, 432, \dots\}.$$

Наименьшее число в $C \cap D$, т. е. 216, называется *наименьшим общим кратным* для 72 и 54.

Иногда приходится пересекать множества геометрических фигур. Например, множество всех квадратов является пересечением множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов, квадрат — это фигура, являющаяся одновременно прямоугольником и ромбом. Пересечением множества всех треугольников с множеством всех правильных многоугольников является множество правильных треугольников.

Упражнения

62. Найдите:

а) пересечение числового отрезка $[0; 4]$ с числовым отрезком $[1; 5]$;

б) пересечение числового отрезка $[0; 2]$ с числовым отрезком $[3; 7]$;

в) пересечение множества четных натуральных чисел с множеством целых чисел, делящихся на 3;

г) пересечение множества натуральных чисел, делящихся на 4, с множеством натуральных чисел, делящихся на 6;

д) пересечение множества корней уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ с множеством корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$;

е) пересечение множества чисел $\{2m + 1\}$ с множеством чисел $\{3n + 2\}$, где m и n принимают все целые значения.

63. Докажите, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

64. Как с помощью двух колышков и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь на части луга, ограниченной двумя дугами окружности (рис. 18)?

65. Как с помощью трех колышков, колечка и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь на части луга, имеющей форму полукруга?

66. Как с помощью трех колышков, колечка и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь на части луга, имеющей форму кругового сегмента?

67. Как с помощью четырех колышков, двух колечек и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь в точках данного прямоугольника?

68. Как с помощью четырех колышков, двух колечек и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь в точках луга, имеющего форму параллелограмма?

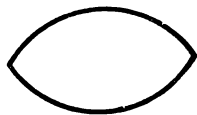


Рис. 18

69. Как с помощью трех колышков, колечка и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь в точках луга, ограниченного с двух сторон параллельными отрезками, а с двух сторон — дугами одного и того же круга (рис. 19)?



Рис. 19



Рис. 20

70*. Как с помощью четырех колышков, двух колечек и веревок привязать козу, чтобы она могла есть траву лишь в точках луга, имеющего форму полуэллипса (рис. 20)?

71*. В точках A , B и C , D находится звукометрические батареи. Звук выстрела орудия дошел до точки A на a сек быстрее, чем до точки B , а до точки C на b сек быстрее, чем до точки D . Как найти точку, где находится орудие?

§ 7. Пересечение множеств и уравнения

Найдем область определения уравнения $\sqrt{25-x^2} = \frac{4}{4-x}$. Чтобы и левая и правая части этого уравнения были определены для некоторого значения x , нужно, чтобы, во-первых, выполнялось неравенство $25-x^2 \geq 0$, а во-вторых, неравенство $4-x \neq 0$. Иными словами, нам надо найти пересечение множества A решений неравенства $25-x^2 \geq 0$ и множества B решений неравенства $4-x \neq 0$. Множество A состоит из чисел отрезка $-5 \leq x \leq 5$. Значит, область определения данного уравнения — это отрезок $[-5; 5]$, из которого удалили точку 4, т. е. два полуотрезка $[-5; 4)$ и $(4; 5]$.

Упражнения

72. Найдите область определения уравнения:

а) $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2-9} = 5$;

б) $\sqrt{x^2+x-12} + \sqrt{x-1} = 2$;

в) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{16-x^2} = 7$;

г) $\sqrt{\frac{16-x^2}{25-x^2}} + \sqrt{x} = 4$.

Разумеется, если область определения уравнения пуста, то уравнение не имеет корней. Пользуясь этим замечанием, докажем, что уравнение

$$\sqrt{3+2x-x^2} = \sqrt{12x-35-x^2} + 4$$

не имеет корней. В самом деле, множество чисел, при которых имеет смысл выражение в левой части, задается

неравенством $3 + 2x - x^2 \geq 0$. Решая его, получаем отрезок $[-1; 3]$. Точно так же, решая неравенство $12x - 35 - x^2 \geq 0$, находим, что правая часть уравнения определена на отрезке $[5; 7]$. Так как пересечение отрезков $[-1; 3]$ и $[5; 7]$ пусто, то область определения уравнения пуста и уравнение не имеет решений.

Упражнения

73. Не решая уравнения, докажите, что оно не имеет решения:

а) $\sqrt{x-4} + \sqrt{1-x} = 2$;

б) $\sqrt{8+2x-x^2} + \sqrt{x-6} = 7$;

в) $\sqrt{x^2-2x-24} = \sqrt{4-x^2} + 5$;

г) $\sqrt{24-2x-x^2} - \sqrt{-12x-35-x^2} = 11$.

§ 8. Системы уравнений и неравенств

С пересечением множеств мы имеем дело при решении систем уравнений и неравенств.

Каждому уравнению $F(x, y) = 0$ с двумя неизвестными соответствует множество A таких пар чисел (a, b) , что $F(a, b) = 0$. Например, для уравнения $x^2 + y^2 = 169$ в это множество входят пары чисел $(5; 12)$, $(-12; 5)$, $(13; 0)$, но не входит пара чисел $(4; 12)$. Мы уже знаем, что это множество геометрически изображается окружностью радиуса 13 с центром в начале координат. Как правило, множество решений уравнения $F(x, y) = 0$ геометрически изображается некоторой линией. Лишь изредка встречаются случаи, когда уравнение $F(x, y) = 0$ задает не линию, а точку, пустое множество или некоторую область (см. стр. 126, 128).

Теперь рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Здесь мы имеем два множества. Множество A состоит из пар чисел, удовлетворяющих первому уравнению, а множество B — из пар чисел, удовлетворяющих второму уравнению. Нам надо найти пары чисел, удовлетворяющих

своим уравнениям, т. е. пересечение множеств A и B . Значит, когда решают систему уравнений, ищут пересечение множества решений первого уравнения с множеством решений второго уравнения. В данном случае пересечение состоит из пар (3; 4) и (4; 3).

Упражнения

74. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169, \\ x^2 - y^2 = 119; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = 10. \end{cases}$

75. Какие из следующих пар чисел: (1; -7), (5; 5), (13; 11), (-8; -6), (17; 1), (-7; 1):

а) удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = 50;$$

б) удовлетворяют уравнению

$$x^2 - y^2 = 48;$$

в) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ x^2 - y^2 = 48. \end{cases}$$

Геометрически решение системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

сводится к отысканию пересечения линий, имеющих уравнения $F(x, y) = 0$ и $\Phi(x, y) = 0$. Обратно, для того чтобы найти точки пересечения линий $F(x, y) = 0$ и $\Phi(x, y) = 0$, надо решить систему уравнений (1).

Найдем, например, точки пересечения прямой $y = 7 - x$ с окружностью $x^2 + y^2 = 25$. Для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 7 - x, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Подставляя значение y из первого уравнения во второе, получим квадратное уравнение

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25.$$

Решая его, находим $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Так как $y = 7 - x$, то $y_1 = 4$, $y_2 = 3$. Значит, прямая $y = 7 - x$ имеет две точки пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = 25$, а именно $A(3; 4)$ и $B(4; 3)$.

Упражнения

76. Найдите точки пересечения окружностей $x^2 + y^2 = 25$ и $(x - 13)^2 + y^2 = 144$.

77. Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 25$ с гиперболой $y = -\frac{12}{x}$.

78. Найдите точки пересечения прямой $y = -5x + 12$ и параболы $y = x^2 - 6x + 10$.

79. Найдите точки пересечения параболы $y = x^2$ и окружности $x^2 + y^2 = 30$.

80. Найдите точки пересечения параболы $y = x^2 + 4$ и гиперболы $y = \frac{5}{x}$.

81. Найдите, при каком условии прямая $y = kx + b$ пересекается с окружностью $x^2 + y^2 = R^2$ в двух точках, в одной точке, не имеет точек пересечения.

82. Найдите, при каком условии окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ имеют две точки пересечения, одну точку пересечения (т. е. касаются друг друга), не имеют точек пересечения.

§ 9. Равносильные системы уравнений

Две системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ \Phi_1(x, y) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} F_2(x, y) = 0, \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

называются *равносильными*, если они имеют одинаковые множества решений. Это означает, что кривые $F_1(x, y) = 0$

и $\Phi_1(x, y) = 0$ пересекаются в тех же точках, что и кривые $F_2(x, y) = 0$, $\Phi_2(x, y) = 0$. При решении системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

мы заменяем ее равносильными системами, т. е. меняем кривые $F(x, y) = 0$ и $\Phi(x, y) = 0$, сохраняя неизменным множество точек пересечения этих кривых.

Упражнения

83. Равносильны ли системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \frac{12}{x}, \\ x + y = 7 \end{cases}?$$

Изобразите линии, пересечение которых задается первой системой и второй системой уравнений.

Мы уже знаем, что неравенство с двумя переменными определяет некоторую плоскую фигуру. Система двух неравенств с двумя переменными определяет пересечение соответствующих фигур. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} y \geq x + 17, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

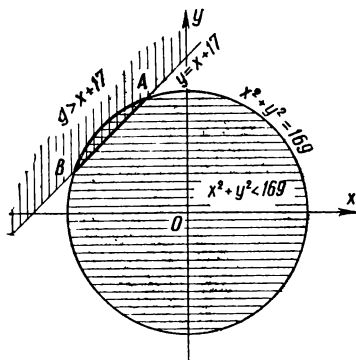


Рис. 21

Первое из них определяет множество точек, лежащих на прямой $y = x + 17$ и выше этой прямой, а второе — множество точек, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = 169$ и внутри этой окружности. Система задает пересечение этих множеств (рис. 21). Оно ограничено хордой AB и меньшей дугой AB .

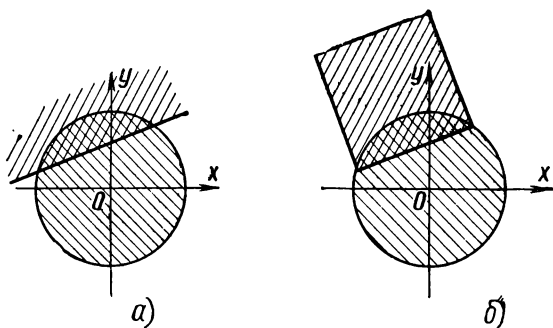


Рис. 22

Чтобы найти координаты точек A и B , надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 17, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$$

Из нее находим, что $A(-5; 12)$ и $B(-12; 5)$.

Разумеется, одна и та же геометрическая фигура может получиться в результате пересечения различных пар (или большего числа) других фигур. Например, сегмент получается как при пересечении круга с полуплоскостью, так и при пересечении круга с квадратом (рис. 22). Это означает, что две системы неравенств могут иметь одно и то же решение. Такие системы неравенств называют равносильными.

Упражнения

84. Опишите множества точек, задаваемые системами неравенств:

а) $\begin{cases} y < 9 - x^2, \\ y \geq x^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ y > x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ x + y \geq -1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y \geq \frac{1}{2} x^2, \\ y \geq \frac{3}{2} x - 1. \end{cases}$

85. Опишите множество точек, заданное системой уравнения и неравенства:

$$а) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 29 \leq 0, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y \geq x^2 - 6x + 3, \\ y = x - 9; \end{cases} \quad в) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ y = \frac{4}{9} x^2. \end{cases}$$

§ 10. Объединение множеств

На рисунке 23 изображены две пересекающиеся прямые. Вместе они образуют крестообразную фигуру. Множество точек этой фигуры получается путем объединения множества точек первой прямой с множеством точек второй прямой. При этом точка O пересечения прямых берется один раз — ведь в множество каждый элемент входит только один раз.

Когда две кучи картофеля ссыпают в одну кучу, то также объединяют два множества — множество картофелин первой кучи с множеством картофелин второй кучи. Вообще, если задано несколько множеств A, B, \dots, N, \dots , то их *объединением* называют множество X , состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из этих множеств. Объединение двух множеств A и B обозначают $A \cup B$.

Например, объединением числового отрезка $[2; 6]$ и числового отрезка $[4; 9]$ является числовой отрезок $[2; 9]$. При этом точки отрезка $[4; 6]$ входят в оба отрезка, но в объединении их берут только один раз. Точно так же круг на рисунке 24 является объединением двух сегментов AMB и ANB . При этом точки хорды AB входят в оба сегмента.

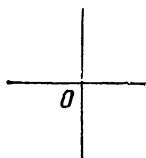


Рис. 23

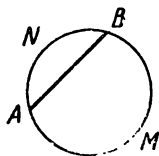


Рис. 24

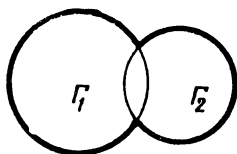


Рис. 25

Примеры. а) Обозначим через A множество точек круга Γ_1 , а через B — множество точек круга Γ_2 (рис. 25). Тогда их объединением будет множество точек фигуры, ограниченной на рисунке 25 жирной линией.

б) Обозначим через A множество успевающих учеников в классе, через B множество девочек в этом классе и через C множество неуспевающих мальчиков. Тогда $A \cup B \cup C$ является множеством всех учащихся этого класса. Множества A и B имеют общие элементы — успевающих девочек.

Иногда объединение состоит из бесконечной совокупности множеств. Например, обозначим через A_n множество всех положительных дробей со знаменателем n :

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots, \frac{m}{1}, \dots \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \dots, \frac{m}{2}, \dots \right\},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}, \dots \right\}.$$

$$\dots \dots \dots$$

Объединением всех множеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ является множество всех положительных дробей, т. е. дробей вида $\left\{ \frac{m}{n} \right\}$, где m и n — натуральные числа.

Обозначим через A_3 множество правильных треугольников, через A_4 множество правильных четырехугольников (квадратов), через A_5 множество правильных пятиугольников и т. д. Тогда

$$A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

является множеством всех правильных многоугольников.

Упражнения

86. Обозначим через A множество целых чисел вида $4k+1$, а через B — множество целых чисел вида $4k+3$. Охарактеризуйте множество $A \cup B$.

87. Найдите объединение множества четных чисел и множества нечетных чисел.

88. Найдите объединение множеств остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников.

89. Пусть множество A есть отрезок $[1; 6]$, множество B — отрезок $[2; 7]$, множество C — отрезок $[-1; 3]$ и множество D — отрезок $[2; 5]$. Найдите множества:

- а) $A \cup B \cup C \cup D$; б) $A \cap B \cap C \cap D$; в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$;
г) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; д) $((A \cup B) \cap C) \cup D$.

90. Множество A состоит из учеников данного класса, знающих английский язык, множество B — из учеников, знающих немецкий язык, множество C — из учеников, знающих французский язык. Охарактеризуйте множества:

- а) $(A \cup B) \cap C$; б) $A \cup (B \cap C)$; в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

§ 11. Объединение множеств и уравнений

Рассмотрим уравнение

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0. \quad (1)$$

Для того чтобы произведение двух множителей равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы хотя один из них обратился в нуль. Поэтому надо сначала решить уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $x^2 - 9 = 0$, а потом объединить множество корней первого уравнения и множество корней второго уравнения. Корнями первого уравнения являются числа $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, а второго — числа $x_3 = 3$, $x_4 = -3$. Поэтому множество корней уравнения (1) таково:

$$A = \{2, -2, 3, -3\}.$$

Итак, решение уравнения $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$ свелось к решению двух уравнений $x^2 - 4 = 0$ и $x^2 - 9 = 0$. Однако было бы неверным сказать, что оно свелось к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Ведь при решении системы уравнений надо найти значения переменной, удовлетворяющие обоим уравнениям системы, а мы ищем значения, удовлетворяющие хотя бы одному из этих уравнений. В случае, когда ищут значения переменной или нескольких переменных, удовлетворяющие хотя бы одному из нескольких уравнений,

говорят, что задана *совокупность уравнений*. Совокупность уравнений $x^2 - 4 = 0$, $x^2 - 9 = 0$ записывают с помощью квадратных скобок:

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Упражнения

91. Решите совокупности уравнений.

- а) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0, \\ x^2 - 6x + 8 = 0; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} |x - 3| + |x + 2| = 5, \\ x^2 - 20x + 64 = 0; \end{cases}$
 в) $\begin{cases} |x - 7| + |x + 3| = 10, \\ |x - 2| + |x + 10| = 12. \end{cases}$

92. Решите уравнения, разложив предварительно левую часть на множители.

- а) $x^3 - 3x - 2 = 0$;
 б) $2x^3 - x^2 - 1 = 0$;
 в) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 - 27x^3 - 8 = 0$;
 г) $6x^4 - 13x^3 - 27x^2 + 40x - 12 = 0$;
 д) $x^3 + px^2 + \left(p - 1 + \frac{1}{p-1}\right)x + 1 = 0$;
 е) $(x - a)(x - b)(x - c)(a + b + c) - abc(x - a - b - c) = 0$;
 ж) $c(x^4 + x^2 + 1) + (b + dx)(x^3 + 1) = 0$.

93. Множество решений уравнения $f_1(x) = 0$ есть M_1 , уравнения $f_2(x) = 0$ — M_2 , ..., уравнения $f_n(x) = 0$ — M_n . Область определения уравнения

$$f_1(x) \dots f_n(x) = 0$$

есть N . Каково множество решений этого уравнения?

94. Решите совокупность неравенств:

- а) $\begin{cases} 2x - 3 > x + 5, \\ x^2 - 4x + 3 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0, \\ x^2 + 6x + 8 \geq 0; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0, \\ 4 - x^2 \geq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ y \geq \frac{3}{16}x^2. \end{cases}$

§ 12. Совокупность систем уравнений

Пусть надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)(x-2y)=0, \\ x^2+y^2=50. \end{cases} \quad (1)$$

Произведение $(x+y)(x-2y)$ может равняться нулю лишь в случае, когда хотя один из множителей $x+y$ или $x-2y$ равен нулю. Поэтому множество решений системы уравнений (1) получается путем объединения множества решений системы

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=50 \end{cases}$$

с множеством решений системы

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ x^2+y^2=50. \end{cases}$$

Иными словами, вместо системы уравнений (1) надо решить совокупность двух систем уравнений

$$\left[\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=50; \\ x-2y=0, \\ x^2+y^2=50. \end{cases} \right]$$

Решая первую систему, получим $x_1=5$, $y_1=-5$; $x_2=-5$, $y_2=5$, а решая вторую систему, получим $x_3=2\sqrt{10}$, $y_3=\sqrt{10}$, $x_4=-2\sqrt{10}$, $y_4=-\sqrt{10}$. Поэтому решение всей совокупности, или, что то же самое, решение системы уравнений (1), есть совокупность четырех частных решений:

$$\left[\begin{cases} x_1=5, \\ y_1=-5, \\ x_2=-5, \\ y_2=5, \\ x_3=2\sqrt{10}, \\ y_3=\sqrt{10}, \\ x_4=-2\sqrt{10}, \\ y_4=-\sqrt{10}. \end{cases} \right]$$

Мы уже говорили, что при решении системы уравнений мы заменяем эту систему равносильными ей системами или совокупностями систем уравнений. При этом кривые, изображающие уравнения, изменяются, а их точки пересечения остаются неизменными. Решение заканчивается, когда мы приходим к совокупности систем уравнений

вида $\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$

Проведем решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2+y^2+x+7y=50, \end{cases}$$

изображая на каждом шагу кривые, пересечение которых требуется найти. Сами кривые $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + y^2 + x + 7y = 50$ — это окружности (рис. 26). Вычтем из второго уравнения первое. Мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y = 25. \end{cases}$$

Теперь надо найти точки пересечения прямой $x + 7y = 25$ и окружности $x^2 + y^2 = 25$ (рис. 27 а). Подставим значение x из второго уравнения в первое. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (25 - 7y)^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y = 25, \end{cases}$$

или, после преобразований, систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 7y + 12 = 0, \\ x + 7y = 25, \end{cases}$$

которая сводится к совокупности систем уравнений

$$\left[\begin{cases} y = 3, \\ x + 7y = 25, \\ y = 4, \\ x + 7y = 25. \end{cases} \right.$$

Здесь уже надо найти пересечение прямой $x + 7y = 25$ с каждой из прямых $y = 3$; $y = 4$ (рис. 27 б). Находя эти пересечения, получаем ответ

$$\left[\begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \\ x = -3, \\ y = 4. \end{cases} \right.$$

Заметим, что запись $\begin{cases} x = a, \\ y = b \end{cases}$ означает точку пересечения прямых $x = a$ и $y = b$.

Упражнения

95. Решите систему уравнений:

а)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x + 4y = 5; \end{cases}$$

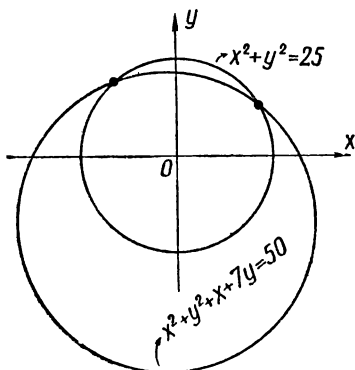


Рис. 26

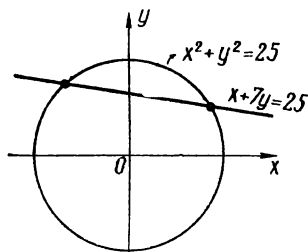


Рис. 27 а

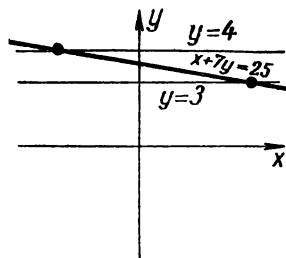


Рис. 27 б

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ (x + y - 1)(x + 2y + 5) = 0; \end{cases} \text{ в) } \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ x^2 + 6xy + 8y^2 = 96. \end{cases}$$

§ 13. Разбиение множеств

Рассмотрим теперь понятие *разбиения* множества. Пусть множество X является объединением множеств A, B, \dots, N, \dots , причем никакие два из них не имеют общих элементов (в этом случае говорят, что множества A, B, \dots, N, \dots попарно не пересекаются). Тогда говорят, что множество X разбито на непересекающиеся подмножества A, B, \dots, N, \dots .

Например, множество всех клеток шахматной доски можно разбить на множество черных клеток и множество белых клеток или на множество клеток первых четырех горизонталей и клеток последних четырех горизонталей. А множество всех карт в колоде можно разбить на множество пик, множество треф, множество бубен и множество червей или на множества черных и красных карт и т. д.

Множество натуральных чисел разбивается на подмножества четных и нечетных чисел. Множество всех треугольников разбивается на множество остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников.

Разбиение на подмножества часто используется для классификации объектов. Например, когда составляют каталог книг в библиотеке, то сначала разбивают их на художественную литературу, книги по общественно-политическим наукам, по естественным наукам, по математике и т. д. После этого каждое полученное подмножество разбивают на более мелкие подмножества: художественную литературу разбивают на прозу, поэзию и драматургию; книги по общественным наукам — на книги по философии, политической экономии и т. д.; книги по естественным наукам — на книги по физике, химии, биологии, геологии и т. д.; книги по математике — на книги по арифметике, алгебре, геометрии, математическому анализу и т. д. Такое разбиение позволяет потом легко отыскивать нужную книгу.

Конечно, одно и то же множество можно разбивать на подмножества разными способами. Когда в той же

библиотеке составляют алфавитный каталог, то сначала книги разбиваются на подмножества по первой букве фамилий авторов: к первому подмножеству относят книги, фамилии авторов которых начинаются на букву «А», ко второму — на букву «Б» и т. д. После этого каждое полученное подмножество разбивают в соответствии со второй буквой фамилий авторов и т. д.

§ 14. Вычитание множеств

Разностью двух множеств A и B называют такое множество $X = A \setminus B$, в которое входят все элементы из A , не принадлежащие множеству B . При этом не предполагается, что множество B является частью множества A . Таким образом, при вычитании множества B из множества A из A удаляют пересечение A и B :

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Например, если A — множество точек первого круга на рисунке 28, а B — множество точек второго круга, то их разностью является множество точек заштрихованной серповидной фигуры. При этом точки дуги MN удаляются из фигуры. Если A — множество всех учащихся VIII класса данной школы, а B — множество всех девочек, которые учатся в этой школе, то $A \setminus B$ — множество всех мальчиков, которые обучаются в VIII классе этой школы.

В случае, когда B — часть множества A , $A \setminus B$ называют *дополнением* к B в множестве A и обозначают B'_A (разумеется, одно и то же множество B может иметь разные дополнения в разных содержащих его множествах A). Например, дополнением множества четных чисел в множестве всех целых чисел является множество нечетных чисел. Дополнением множества всех квадратов в множестве прямоугольников является множество всех прямоугольников с неравными сторонами. А дополнением того же множества квадратов в множестве всех ромбов является множество ромбов с неравными смежными углами.

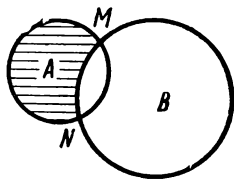


Рис. 28

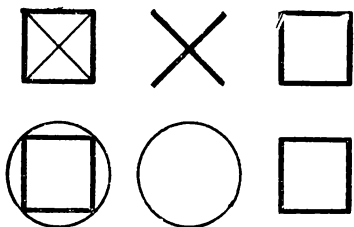


Рис. 29

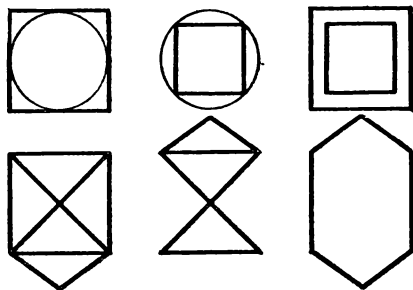


Рис. 30

Упражнения

96. Множество A — отрезок $[1; 4]$, множество B — отрезок $[2; 6]$. Найдите множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Чему равно множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

97. Пусть A — множество чисел вида $2m - 1$, B — множество чисел вида $4n + 1$. Из каких чисел состоит множество $A \setminus B$ (m и n пробегает все целые числа)?

98. Найдите дополнение множества всех тупоугольных треугольников в множестве всех треугольников.

99. Найдите дополнение множества правильных треугольников в множестве всех треугольников.

100. Найдите дополнение множества правильных треугольников в множестве всех правильных многоугольников.

101. Сформулируйте правило, по которому из фигур первых двух столбцов получаются фигуры третьего столбца (рис. 29).

102. Сформулируйте правило, по которому из фигур первых двух столбцов получаются фигуры третьего столбца (рис. 30).

§ 15. Алгебра множеств

Мы познакомились с основными действиями над множествами — объединением, вычитанием и пересечением множеств. Эти действия обладают целым рядом свойств, напоминающих свойства действий над числами. Как известно, вся арифметика целых чисел и алгебра многочленов по-

строены на немногих законах действий над числами, которые выражаются следующими равенствами:

$$a + b = b + a$$

(коммутативность сложения);

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(ассоциативность сложения);

$$a + 0 = a$$

(существование нуля);

$$a + (-a) = a - a = 0$$

(существование противоположного элемента);

$$ab = ba$$

(коммутативность умножения);

$$(ab)c = a(bc)$$

(ассоциативность умножения);

$$a(b + c) = ab + ac$$

(дистрибутивность умножения относительно сложения);

$$a \cdot 1 = a$$

(существование единицы)

и

$$a \cdot 0 = 0.$$

Большинство этих свойств действий над числами имеют место и для действий над множествами. Например, ясно, что для любых двух множеств имеем $A \cup B = B \cup A$, т. е. $A \cup B$ и $B \cup A$ обозначает одно и то же множество, в которое входят все элементы из A и из B и никаких других элементов. Точно так же ясно, что

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

— это множество, которое составлено из элементов всех трех множеств A , B , C .

Точно так же доказывается, что $A \cap B = B \cap A$ и $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — множества $A \cap B$ и $B \cap A$ состоят из общих элементов множеств A и B , а множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$ — из общих элементов множеств A , B и C .

Несколько сложнее доказать дистрибутивность пересечения множеств относительно объединения, т. е. выполнение равенства

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (1)$$

Мы не будем проводить строго логического доказательства этого равенства, а ограничимся тем, что дадим два поясняющих рисунка. На первом из этих рисунков заштриховано пересечение множества A с множеством $B \cup C$, а на втором — пересечения A с B и A с C . Эти рисунки делают равенство (1) совершенно очевидным (рис. 31).

Роль нуля в действиях над множествами играет пустое множество \emptyset . Именно справедливы равенства:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset,$$

соответствующие равенствам $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$ для чисел.

Таким образом, объединение и пересечение множеств обладают теми же свойствами, что и сложение и умножение чисел. Поэтому все формулы алгебры многочленов, в которые входят лишь действия сложения и умножения, например тождество

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

остаются справедливыми и для множеств:

$$(A \cup B)^2 = A^2 \cup 2(A \cap B) \cup B^2,$$

где положено $A^2 = A \cap A$ и $2(A \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$.

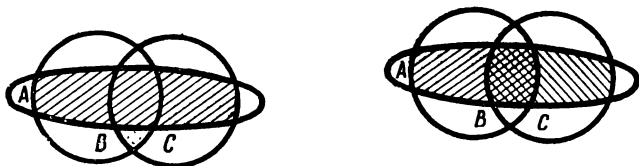


Рис. 31

Но алгебра множеств имеет и своеобразные черты. Ее основное своеобразие состоит в том, что если одно из множеств A и B является подмножеством другого, то формулы для объединения и пересечения множеств упрощаются, а именно если $A \subset B$, то $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$. Это сразу становится ясно из рисунка 32.

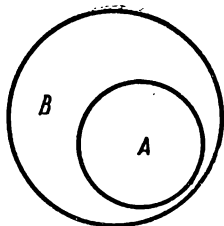


Рис. 32

В частности, так как $A \subset A$, то $A \cup A = A \cap A = A$.

Это позволяет упростить формулы алгебры множеств. Например, так как $A^2 = A$, $B^2 = B$, $A \cap B \subset A$, то $A^2 \cup 2(A \cap B) = A \cup 2(A \cap B) = A$, и формула принимает вид $(A \cup B)^2 = A \cup B$. Вообще, в алгебре множеств не имеет смысла говорить о степенях, так как для любого n имеем $A^n = A$.

Покажем теперь, что для множеств есть второй «распределительный закон», которого нет для чисел. Он выражается формулой

$$A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Чтобы доказать его, достаточно раскрыть справа скобки по правилу (1) и заметить, что множества $A \cap B$ и $A \cap C$ являются подмножествами в A , следовательно, $A \cap B \subset A$ и $A \cap C \subset A$. Кроме того, $A \cap A = A$, а поэтому

$$(A \cap A) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

Отметим далее, что операция вычитания множеств также не похожа по своим свойствам на операцию вычитания чисел. Для любых трех чисел a, b, c верно равенство $a + (b - c) = (a + b) - c$. А для трех множеств A, B, C , вообще говоря,

$$A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus C.$$

Дело в том, что при объединении множеств повторяющиеся элементы берутся только один раз, а вычитать можно и множество, не содержащееся в уменьшаемом. Поэтому если, например, все три множества A, B, C совпадают, $A = B = C$, то $A \cup B = A$ и потому $(A \cup B) \setminus C = A \setminus A$ — пустое множество, а

$$A \cup (B \setminus C) = A \cup \emptyset = A.$$

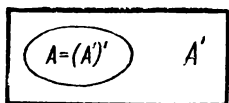


Рис. 33

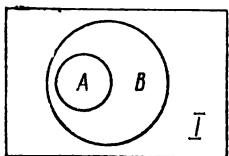


Рис. 34

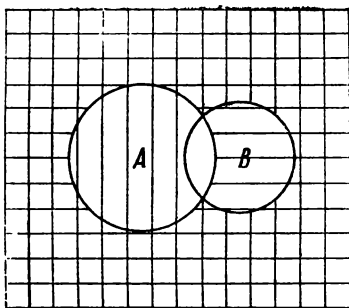


Рис. 35

В теории множеств есть еще операция, отсутствующая в обычной алгебре. Пусть рассматриваются лишь множества, делающиеся подмножествами одного и того же множества I . В этом случае I называют *универсальным множеством*. Обозначим через A' дополнение множества A в I . Ясно, что множества A и A' не пересекаются, а в сумме составляют все универсальное множество I . Таким образом, $A \cap A' = \emptyset$ и $A \cup A' = I$. Кроме того, ясно, что $\emptyset' = I$ (дополнение пустого множества совпадает с универсальным множеством) и $I' = \emptyset$. Далее, имеет место равенство $(A')' = A$ (рис. 33).

Покажем теперь: если $A \subset B$, то $A' \supset B'$. В самом деле, чем больше само множество, тем меньше элементов останется в его дополнении. На рисунке 34 универсальное множество I изображено в виде прямоугольника, а множества A и B в виде кругов. Дополнение к множеству A состоит из точек прямоугольника, лежащих вне меньшего круга, а дополнение к множеству B — из точек прямоугольника, лежащих вне большего круга. Ясно, что $A' \supset B'$.

Несколько сложнее доказываются следующие формулы:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

и

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

На рисунке 35 дополнение к множеству A заштриховано горизонтальными линиями, а дополнение к множеству B — вертикальными линиями. Дополнение к множеству $A \cup B$ состоит из точек прямоугольника, не попавших ни в один из кругов. Это как раз точки, лежащие в области, покрытой обеими штриховками, т. е. точки из $A' \cap B'$. Поэтому ясно, что

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

§ 16. Счетные множества

Бесконечное множество A называется *счетным*, если его элементы можно перенумеровать. Самым простым примером счетного множества является натуральный ряд чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Здесь число n само является своим «номером». Счетно и множество чисел $6, 7, 8, 9, \dots, 5+n, \dots$. Здесь номер n получает число $5+n$. Вообще, любое бесконечное подмножество A натурального ряда чисел N счетно. В самом деле, расположим элементы подмножества A в порядке возрастания и занумеруем их. Например, пусть A — множество всех простых чисел. Оно нумеруется следующим образом:

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Простое число	2	3	5	7	11	13	17	19	23	...

Упражнения

103. Напишите первые пять элементов занумерованного счетного множества, n -й элемент которого равен:

а) $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$; б) $a_n = \frac{n^3+1}{2^n}$;

в) $a_n = \frac{n^2-n+5}{n^2+4}$; г) $a_n = 2^{n^2}$.

Рассмотрим теперь множество Z всех целых чисел:

$\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$.

На первый взгляд кажется, что это множество невозможно перенумеровать. Ведь если мы начнем нумерацию, скажем, с числа 0, а потом будем нумеровать вправо, то все отрицательные числа окажутся незанумерованными. Если же мы будем нумеровать влево то незанумерованными окажутся все положительные числа. Однако эту нумерацию можно осуществить, применив следующую хитрость: двигаться не в одном направлении, а все время менять его. Иными словами, будем нумеровать так: числу 0 дадим номер 1, числу 1 — номер 2, числу -1 — номер 3, числу 2 — номер 4, числу -2 — номер 5 и т. д. При этом число n ($n=1, 2, \dots$) получает номер $2n$, а число $-n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — номер $2n+1$.

многими способами может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$. Например,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots = \frac{n}{2n} = \dots$$

Поэтому если мы перенумеруем все дроби, то тем более окажутся перенумерованными все положительные рациональные числа. А дроби нумеруются по схеме, изображенной на странице 156.

Упражнения

107. Докажите счетность следующих множеств:

- а) множества всех десятичных дробей;
- б) множества всех четных целых чисел;
- в) множества всех (положительных и отрицательных) рациональных чисел;
- г) множества всех рациональных чисел вида $\frac{m}{5^n}$, где m и n — натуральные числа.

Наряду с описанной выше схемой нумерации объединения счетного множества счетных множеств применяются и иные схемы, например «по диагоналям»:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots \\
 & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots \\
 & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots \\
 & \swarrow & \swarrow & & & \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots \\
 & \swarrow & & & & \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Опишем еще одну любопытную схему нумерации. Будем нумеровать множество положительных дробей:

$$A = \left\{ \frac{m}{n} ; m \in N, n \in N \right\}.$$

Поставим в соответствие каждой дроби $\frac{m}{n}$ натуральное число $a = 2^m 3^n$. Ясно, что разным дробям при этом будут

соответствовать различные натуральные числа: если $m_1 \neq m_2$ или если $m_1 = m_2$, но $n_1 \neq n_2$, то $2^{m_1} 3^{n_1} \neq 2^{m_2} 3^{n_2}$.

А теперь осталось расставить числа вида $2^m 3^n$ в порядке возрастания и перенумеровать их. Тем самым будет получена и нумерация всех дробей $\frac{m}{n}$.

Описанный способ нумерации можно обобщить на более сложные случаи. Пусть надо занумеровать все квадратные уравнения с натуральными коэффициентами, т. е. уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — натуральные числа. Возьмем три простых числа 2, 3 и 5 и поставим в соответствие каждому уравнению $ax^2 + bx + c = 0$ натуральное число $2^a 3^b 5^c$.

Из теоремы об единственности разложения натуральных чисел на простые множители вытекает, что разным уравнениям будут соответствовать разные числа: если тройка чисел (a_1, b_1, c_1) не совпадает с тройкой чисел (a_2, b_2, c_2) , то $2^{a_1} 3^{b_1} 5^{c_1} \neq 2^{a_2} 3^{b_2} 5^{c_2}$. А теперь расставляем числа вида $2^a 3^b 5^c$ в порядке возрастания и нумеруем их. Тем самым окажутся занумерованными и все квадратные уравнения с натуральными коэффициентами.

Чтобы занумеровать квадратные уравнения с любыми целыми коэффициентами, поступим следующим образом. Возьмем не три, а шесть простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11 и 13. Уравнению $ax^2 + bx + c = 0$ поставим в соответствие натуральное число

$$2^{|a|} 3^{\alpha} 5^{|b|} 7^{\beta} 11^{|c|} 13^{\gamma}. \quad (1)$$

Здесь α равно нулю, если $a \geq 0$, и α равно 1, если $a < 0$. Аналогичный смысл имеют β и γ . Например, уравнению

$$-2x^2 + x - 2 = 0$$

ставим в соответствие число

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 13 = 94\,380.$$

А теперь, как и выше, расставляем числа вида (1) в порядке возрастания и нумеруем их. Тем самым оказываются занумерованными и все квадратные уравнения с целыми коэффициентами.

Упражнения

108. Занумеруйте множество кубических уравнений

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

с натуральными коэффициентами.

109. Занумеруйте множество кубических уравнений с целыми коэффициентами.

110. Занумеруйте множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны.

§ 18. Несчетные множества

До сих пор мы рассматривали лишь счетные множества. Покажем теперь, что не все бесконечные множества счетны, что существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать. Простейшим примером такого множества является множество всех точек отрезка. Проведем доказательство от противного. Предположим, что каким-то способом удалось перенумеровать все точки отрезка $[a; b]$, и покажем, что это предположение ведет к противоречию — среди точек отрезка останется хотя одна занумерованная.

Итак, пусть множество x всех точек отрезка $[a; b]$ занумеровано:

$$x: x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Разобьем отрезок на три равные части. Точка x_1 может принадлежать не более, чем двум частям (вообще говоря, она принадлежит одной части, и только, если она совпадает с одной из точек деления, то она принадлежит сразу двум частям, рис. 37). Выберем ту часть $[a_1; b_1]$, которая не содержит точку x_1 , и снова разобьем ее на три части. Теперь из этих трех частей выберем ту часть $[a_2; b_2]$, которая не содержит точку x_2 . Она не содержит и точку x_1 , так как эта точка не принадлежит всей части $[a_1; b_1]$.

Продолжая описанный процесс, мы получим последовательность отрезков:

$$[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n], \dots,$$

таких, что

а) каждый следующий отрезок является частью предыдущего и короче его в три раза;

б) отрезок $[a_n; b_n]$ не содержит точек x_1, \dots, x_n .

Из условия а) вытекает, что пересечение отрезков $[a_1; b_1], \dots, [a_n; b_n], \dots$ состоит из одной точки c . Но эта точка не может совпадать ни с одной из точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Ведь если бы, например, она совпала с $x_n, c = x_n$, то получилось бы, что отрезок $[a_n; b_n]$ содер-

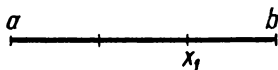


Рис. 37

жит точку x_n , а мы выбрали его так, чтобы он не содержал этой точки.

Итак, нам удалось найти точку c отрезка $[a; b]$, не совпадающую ни с одной из точек x_1, \dots, x_n, \dots , т. е. не получившую никакого номера. А это противоречит предположению, что мы перенумеровали все точки отрезка $[a; b]$. Значит, это предположение неверно и множество точек отрезка $[a; b]$ перенумеровать нельзя.

Совершенно так же доказывается, что нельзя перенумеровать множество, элементами которого являются всевозможные последовательности, составленные из нулей и единиц, например

$$1100010101 \dots$$

В самом деле, предположим, что нам удалось перенумеровать это множество. Обозначим последовательность, получившую номер n , через x_n . Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &: a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \dots \\ x_2 &: a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &: a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

где через a_{mn} обозначены цифры 0 и 1.

Покажем, что наше предположение неверно и что по крайней мере одна последовательность осталась занумерованной. Именно положим:

$$x: b_1b_2 \dots b_n,$$

где $b_n = 1 - a_{nn}$. Иными словами, чтобы получить число b_n , надо вычесть из 1 n -ю цифру последовательности x_n . Например, если

$$\begin{aligned} x_1 &: 11011011 \dots \\ x_2 &: 10111001 \dots \\ x_3 &: 00011111 \dots \\ x_4 &: 11110010 \dots \end{aligned}$$

то

$$x: 0110 \dots$$

Последовательность x состоит из нулей и единиц и по сделанному выше предположению должна была бы получить какой-то номер, скажем $x = x_n$. Но в последовательности x_n на n -м месте стоит цифра a_{nn} , а в последовательности x на том же месте стоит цифра $1 - a_{nn}$, отличная от a_{nn} . Значит, $x \neq x_n$.

Итак, мы построили последовательность из нулей и единиц, не получившую номера при проведенной нумерации. Это противоречит предположению, что все такие последовательности были занумерованы.

Упражнения

111. Докажите, что нельзя занумеровать множество бесконечных последовательностей, составленных из цифр 1, 2, 3.

§ 19. Взаимно-однозначное соответствие между множествами

Мы познакомились с двумя типами бесконечных множеств — счетными и несчетными. И счетные и несчетные множества бесконечны. Но элементы счетных множеств можно перенумеровать, а элементы несчетных — нельзя. Можно сказать, что несчетные множества содержат «больше» элементов, чем счетные. Однако мы еще не знаем, что означают для бесконечных множеств слова «больше элементов», «меньше элементов», «поровну элементов». Для конечных множеств для ответа на эти вопросы надо просто пересчитать их и посмотреть, какое из них содержит больше элементов. Но бесконечные множества пересчитать нельзя, и поэтому надо придумать новый способ решения вопроса.

Представим себе, что на танцплощадке собрались юноши и девушки, чтобы потанцевать. Пока оркестр не заиграл, нам трудно быстро ответить на вопрос, одинаково ли число юношей и девушек. Но пусть оркестр заиграет танец, который все умеют танцевать. Юноши пригласят девушек на танец, и мы сразу сможем ответить на вопрос, одинаково ли число юношей и девушек. Если все юноши и все девушки разбились на танцующие пары, то без дальнейших подсчетов ясно, что юношей ровно столько же, сколько и девушек. А если часть юношей не танцует, то юношей больше.

В случае, когда танцуют все, между множеством юношей и множеством девушек устанавливается соответствие, обладающее следующими свойствами:

- 1) каждому юноше соответствует одна и только одна девушка — его партнерша;
- 2) каждой девушке соответствует один и только один юноша — ее партнер.

Если между двумя множествами установлено соответствие, обладающее этими двумя свойствами, то говорят, что между этими множествами установлено *взаимно-однозначное соответствие*. Иными словами, между множествами A и B установлено взаимно-однозначное соответствие, если каждому элементу a из A поставлен в соответствие один элемент b из B , и при этом соответствии каждый элемент b из B соответствует одному и только одному элементу a из A .

Когда мы нумеруем элементы счетного множества, то тем самым устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества натуральных чисел: $n \leftrightarrow a_n$. Поэтому можно сказать, что счетными называются множества, для которых существует взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел.

Приведем некоторые примеры взаимно-однозначного соответствия. Выберем на плоскости систему координат и поставим в соответствие каждой окружности вписанный в нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат. Мы получим взаимно-однозначное соответствие между множеством всех окружностей на плоскости и множеством всех квадратов, стороны которых параллельны осям координат. Другое взаимно-однозначное соответствие между этими множествами получается, если сопоставить каждой окружности описанный вокруг нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат.

Далее, рассмотрим множество A всех точек на плоскости и множество B всех окружностей на этой плоскости, имеющих заданный радиус R . Если поставить в соответствие каждой точке a окружность радиуса R с центром в этой точке, то получим взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B .

Понятие взаимно-однозначного соответствия весьма важно при изучении функций. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Когда x изменяется на отрезке $[-1; 2]$, y изменяется на отрезке $[-1; 8]$. При этом каждому числу x из отрезка $[-1; 2]$ соответствует одно и только одно значение y , принадлежащее отрезку $[-1; 8]$, а каждому значению y из отрезка $[-1; 8]$ — одно и только одно значение x из отрезка $[-1; 2]$. Иными словами, функция $y = x^3$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками отрезков $[-1; 2]$ и $[-1; 8]$. Эта функция устанавливает и взаимно-однозначное соответствие между точками числовых прямых x и y . Отсюда следует, что каждому значению y соответствует единственное значение x , такое, что $x^3 = y$. Это значение x называют кубическим корнем из y , $x = \sqrt[3]{y}$.

А функция $y = x^3$ не задает взаимно-однозначного соответствия между числовыми прямыми x и y . Например, значениям $x = -3$ и $x = 3$ соответствует одно и то же значение $y = 9$. Кроме того, отрицательным значениям

y не соответствуют никакие значения x . Чтобы получить взаимно-однозначное соответствие, надо рассматривать функцию $y = x^2$ не на всей числовой прямой, а только на положительной полуоси $x \geq 0$. Каждой точке x этой полуоси соответствует одно значение $y = x^2$, принадлежащее положительной полуоси y . При этом ясно, что разным неотрицательным значениям x соответствуют разные значения y и для каждого $y \geq 0$ найдется такое x , что $x^2 = y$. Это значение x называют арифметическим значением квадратного корня из y , $x = \sqrt{y}$.

Упражнения

112. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости и B — множество всех квадратов на плоскости. Каждому квадрату ставят в соответствие вписанную в него окружность. Является ли это отображение взаимно-однозначным?

113. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости и B — множество всех правильных треугольников на этой плоскости. Каждому треугольнику ставят в соответствие вписанную в него окружность. Является ли это отображение взаимно-однозначным?

114. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости и B — множество всех правильных треугольников, одна из сторон которых параллельна некоторой фиксированной прямой. Каждому треугольнику ставят в соответствие описанную вокруг него окружность. Является ли это отображение взаимно-однозначным?

115. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости и B — множество всех правильных шестиугольников, стороны которых параллельны сторонам фиксированного правильного шестиугольника (лежащего в той же плоскости). Каждому шестиугольнику ставится в соответствие описанная вокруг него окружность. Является ли это отображение взаимно-однозначным?

116. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости и B — множество всех точек этой плоскости. Каждой окружности ставят в соответствие ее центр. Является ли это отображение взаимно-однозначным?

117. Каждому квадратному уравнению вида $x^2 + ax - b = 0$ (a и b — положительные числа) ставится в соответствие его положительный корень. Является ли это соответствие взаимно-однозначным?

118. Каждой параболе, ось которой параллельна оси ординат, ставится в соответствие ее уравнение вида $y = ax^2 + bx + c$. Является ли это соответствие взаимно-однозначным?

119. Устанавливает ли функция $y = x^2$ взаимно-однозначное соответствие между отрезками $[-2; 4]$ и $[0; 16]$?

120. Устанавливает ли функция $y = x^2$ взаимно-однозначное соответствие между отрезками $[2; 4]$ и $[4; 16]$?

§ 20. Мощность множества

Если между двумя множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то такие множества называют *эквивалентными*. Для двух конечных множеств взаимно-однозначное соответствие можно установить лишь в случае, когда они имеют одинаковое количество элементов. Поэтому конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют поровну элементов. Для бесконечных множеств не имеет смысла говорить о числе элементов. Говорят иначе: эквивалентные множества имеют одинаковую

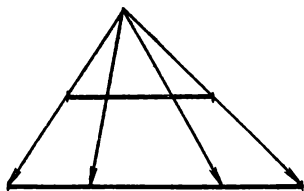


Рис. 38

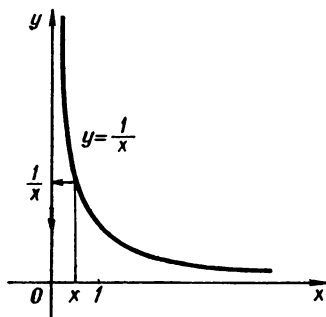


Рис. 39

мощность. Таким образом, мощность — это то общее, что имеют все эквивалентные между собой множества (например, пять — то общее, что имеют множества: пять яблок, пять пальцев, пять спичек, пять звезд, пять слов, пять уравнений и т. д.).

Все счетные множества имеют одинаковую мощность — ту же мощность, что и множество натуральных чисел. Множество точек на отрезке длины 1 имеет ту же мощность, что и множество точек на отрезке длины 2. На рисунке 38 показано, как установить взаимно-однозначное соответствие между этими множествами. Эквивалентны и множе-

ства точек на промежутке $(0; 1)$ и на луче $(1; +\infty)$. Здесь взаимно-однозначное соответствие устанавливается с помощью функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 39). Все множества, имеющие ту же мощность, что и множество точек отрезка $[0; 1]$, называются множествами мощности *континуум* (по-латыни *continuum* — непрерывное).

Для бесконечных множеств имеет место замечательное обстоятельство, отличающее их от конечных множеств — бесконечное множество может быть эквивалентно своей части. Например, выше мы установили взаимно-однозначное соответствие между множеством целых чисел и его частью — множеством натуральных чисел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Читатель познакомился в этой статье с основными понятиями теории множеств. Свойства конечных множеств были ему известны из жизненного опыта — складывать и вычитать конечные множества приходится уже малым детям. Новыми явились для читателя точные математические формулировки соответствующих понятий и их приложения к вопросам школьной математики.

А вот свойства бесконечных множеств уже совсем необычны. Оказалось, что для бесконечных множеств часть может содержать столько же элементов, что и целое, что есть бесконечные множества с различным числом элементов (так сказать, одно из них «бесконечнее» другого). Конечно, здесь нельзя было дать представления о роли, которую играет теория множеств в современной математике. Теория множеств является одной из основ, на которых базируются почти все математические дисциплины — топология, функциональный анализ, общая алгебра и т. д. Но это уже далеко выходит за рамки данной статьи.

Ответы и указания к упражнениям

12. Множество ограничено двумя полуокружностями радиуса l с центрами в точках A и B и двумя отрезками, равными и параллельными отрезку AB и отстоящими от него на l .

16. На рисунке изображены 12 треугольников.

17. г) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

18. б) Множество точек круга с центром O и радиусом R (включая точки окружности); д) центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC , или пустое множество (если точки A , B и C лежат на одной прямой).

19. а) 15 — нечетное число; б) 16 — составное число; д) аист — не млекопитающее; е) слон — не хищное животное; з) Иркутск не находится в Европейской части СССР.

22. Числа вида: а) $\frac{n+2}{n^2}$; б) $\frac{2n}{3n+2}$; в) $\frac{1}{n(n+1)}$; г) $(n+1)n^2$.

23. Первая пара: многоугольники; фигуры, ограниченные кривыми линиями.

Вторая пара: фигуры, вытянутые в вертикальном направлении, и фигуры, вытянутые в горизонтальном направлении.

Третья пара: выпуклые и невыпуклые фигуры.

25. Множество прямоугольных треугольников, у которых квадрат длины гипотенузы не равен сумме квадратов длин катетов, пусто.

27. Множество пар чисел $(a; b)$, для которых $a^2 - b^2 \neq (a - b)(a + b)$, пусто.

28. а) Все действительные числа, кроме -1 , 0 и 1 ; в) $5 \leq |x| \leq 10$.

29. б) Область определения — все действительные числа, кроме -4 , -3 , -2 и -1 . Выделяя полный квадрат в числителе каждой дроби и выполняя почленное деление, получаем уравнение

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3},$$

которое приводится к квадратному.

30. а) Не совпадают, так как второе уравнение определено лишь при $x \geq 1$; б) второе уравнение определено лишь при $x \geq 1$; в) не совпадают, так как первое уравнение определено при $x \leq 1$, или $x \geq 6$, а второе лишь при $x \geq 6$; г) не совпадают, так как второе уравнение определено лишь при $|x| \geq 1$.

31. Совпадают множества корней в парах уравнений а) и г).

32. а) Первое уравнение имеет корень $x=3$, а корнями второго являются все числа, кроме $x=-2$, 0 , 2 . Значит, они неравносильны на всех числовых множествах N , Z , Q , Q_+ , Q_- ; в) первое уравнение имеет корни 2 и 4 .

Чтобы решить второе уравнение, надо отдельно рассмотреть промежутки $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ и $(3; +\infty)$ и заменить на каждом промежутке линейным уравнением. Например, при $x \leq 1$ получаем уравнение $1 - x - 2 + x - 3 + x = 0$, корень $x = 4$ которого не лежит на $(-\infty; 1)$. Находим, что и второе уравнение имеет корни 2 и 4. Значит, эти уравнения равносильны.

33. Закрепить кнопки в точках F_1 и F_2 , соединить их нитью длины $2a$ и натянуть нить карандашом. При скольжении карандаш опишет эллипс с фокусами F_1 и F_2 и большой осью $2a$.

35. Отложить отрезок AB длины $2a$, выбрать на нем точку C и провести окружности с центрами в фокусах эллипса и с радиусами AC и CB . Точки пересечения окружностей принадлежат эллипсу с данными фокусами и большой осью $2a$. Выбирая другие точки на отрезке AB , получаем еще точки эллипса.

39. В дважды пробегаемый отрезок.

40. В перпендикуляр к отрезку F_1F_2 , проведенный в середине этого отрезка.

41. В дважды пробегаемые лучи F_1A и F_2B .

42. В перпендикуляр к прямой l , проведенный через точку F .

43. Разность расстояний от орудия до звукометрических батарей по условию равна $\frac{a}{3}$ км. Значит, орудие может находиться на ветви гиперболы, фокусы которой совпадают с батареями, а действительная ось равна $\frac{a}{3}$. Так как звук распространяется на b км, то, кроме того, орудие находится внутри круга, центр которого совпадает с той батареей, куда звук приходит позже, а радиус равен b . Получаем часть одной ветви гиперболы (той, которая ближе к батарее, куда звук приходит раньше).

44. Если турист сначала идет на станцию B , а потом едет до станции A , то он затратит $\frac{MB}{v_1} + \frac{a}{v_2}$ часов, а если он прямо идет до станции A , то затратит $\frac{MA}{v_1}$ часов. Выгоднее идти до станции B , если $\frac{MB}{v_1} + \frac{a}{v_2} \leq \frac{MA}{v_1}$, т. е. если $MA - MB \geq \frac{av_1}{v_2}$. Это условие выполняется, если точка M

находится в области, ограниченной одной ветвью гиперболы с фокусами A и B и действительной осью $\frac{av_1}{v_2}$.

47. Расстояние точки $M(x, y)$ до точки $F(2, 1)$ равно $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$, а до прямой $y = -1$ $|y+1|$. Значит, уравнение искомого множества точек имеет вид

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y+1|.$$

Возводя в квадрат, получаем $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$, откуда $4y = (x-2)^2$.

50. в) Так как радиус окружности равен 5, ее уравнение имеет вид $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 25$. Поскольку окружность проходит через точку $A(4; 6)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению окружности, и потому $(4-a)^2 + (6-1)^2 = 25$. Точно так же получаем, что

$$(-2-a)^2 + (-2-1)^2 = 25.$$

Таким образом, чтобы найти a и b , надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 8a - 12b = -27, \\ a^2 + b^2 + 4a + 4b = 17. \end{cases}$$

51. б) Выделяя полные квадраты, получаем

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 36,$$

значит, центр окружности — в точке $A(5; -1)$, а ее радиус равен 6; д) выделяя полные квадраты, получаем

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + 9 = 0.$$

Это уравнение задает пустое множество.

52. в) $y = x^2 - 6x + 1$ — уравнение параболы с вершиной $A(3; -8)$, обращенной ветвями вверх; неравенство $y \leq x^2 - 6x + 1$ выполняется для точек, лежащих на этой параболе и ниже ее;

г) равенство $|y| = |x+1|$ можно переписать в виде $y = \pm(x+1)$; получаем две прямые, проходящие через точку $A(-1; 0)$ и наклоненные к оси абсцисс под углами 45° и 135° . Они делят плоскость на четыре части. Неравенство $|y| > |x+1|$ выполняется в верхней и нижней частях.

53. Ко второму множеству принадлежит парабола $y = x^2 - 6x + 1$, а к первому множеству она не принадлежит.

54. $|y| = 4x - 2$, т. е. $y = \pm(4x - 2)$, причем $4x - 2 \geq 0$.

56. а) Множество точек, где $y \geq 2x^2$, т. е. точек, лежащих на параболе $y = 2x^2$ и выше нее.

57. в) Две плоскости, параллельные плоскости P и удаленные от нее на d ; е) прямой круговой цилиндр с осью l и радиусом d ; з) внешняя область сферы радиуса R с центром A .

59. $C \supset A \supset B \supset E \supset D \supset F$.

62. б) Пустое множество; е) так как наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6, то разобьем все числа на классы в зависимости от их остатка при делении на 6; получим классы чисел $\{6k\}$, $\{6k+1\}$, $\{6k+2\}$, $\{6k+3\}$, $\{6k+4\}$, $\{6k+5\}$; при делении на 2 остаток 1 дают классы $\{6k+1\}$, $\{6k+3\}$, $\{6k+5\}$, из них остаток 2 при делении на 3 дает только класс $\{6k+5\}$. Значит,

$$\{2m+1\} \cap \{2n+2\} = \{6k+5\}.$$

65. Поставить колышки в точках A и B , на колышки A и B натянуть веревку, по которой может скользить колечко. К колечку привязать веревку длины R , а к концу этой веревки — козу. Кроме того, привязать козу к веревке длины R , идущей от третьего колышка.

67. Поставить колышки A , B , C , D в серединах сторон прямоугольника, натянуть веревки на колышки A и C , а также B и D и на эти веревки надеть колечки. Козу привязать к колечкам веревками длины $\frac{BD}{2}$ (для колечка, скользящего по AC) и $\frac{AC}{2}$ (для второго колечка).

69. Два колышка A и B ставятся на прямой, параллельной обоим отрезкам и равноудаленной от них. На эти колышки натягивается веревка с надетым колечком. К колечку привязывается веревка, длина которой равна половине расстояния между отрезками, а к веревке — коза. Кроме того, в центр круга ставится третий колышек C , а коза привязывается к нему веревкой, длина которой равна радиусу круга.

70. Два колышка ставятся в фокусы эллипса F_1 и F_2 , и к ним привязывается веревка длиной $2a$ (большая ось эллипса). На эту веревку надевается колечко, к которому привязывают некоротко козу. Два других колышка ставят в точки A и B , на них натягивают веревку с надетым на нее колечком и к нему привязывают козу веревкой длины b , где $2b$ — малая ось эллипса.

71. Так как в точку A звук приходит на a сек быстрее, чем в точку B , то разность расстояний MB и MA равна $\frac{a}{3}$. Значит, точка M лежит на ветви гиперболы с фокусами A и B и действительной осью $\frac{a}{3}$, которая ближе к точке A . Точно так же M лежит на ветви гиперболы с фокусами C и D и действительной осью $\frac{b}{3}$, которая ближе к точке C . Таким образом, орудие находится на пересечении ветвей двух гипербол.

72. г) Уравнение определено в области, где $\frac{16-x^2}{25-x^2} \geq 0$ и $x \geq 0$. Решая эти неравенства, находим, что

$$0 \leq x \leq 4, \text{ или } x > 5.$$

73. в) Выражение $x^2 - 2x - 24$ определено на объединении лучей $x \leq -4$ и $x \geq 6$, а $4 - x^2$ — на отрезке $-2 \leq x \leq 2$; так как эти множества не пересекаются, то область определения уравнения пуста;

г) так как $24 - 2x - x^2 = 25 - (x+1)^2$, то наибольшее значение $\sqrt{24 - 2x - x^2}$ равно 5; а так как, кроме того, $\sqrt{-12x - 35 - x^2} \geq 0$, то разность корней не может равняться 11.

81. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ x^2 + y^2 = R^2, \end{cases}$$

получаем, что $x^2(1+k^2) + 2kbx + b^2 - R^2 = 0$. Это уравнение имеет два действительных корня, если $(k^2+1)R^2 > b^2$, один корень, если $(k^2+1)R^2 = b^2$, и не имеет действительных корней, если $(k^2+1)R^2 < b^2$.

Значит, прямая $y = kx + b$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = R^2$, если $(k^2+1)R^2 > b^2$, касается ее, если $(k^2+1)R^2 = b^2$, и не пересекает ее, если $(k^2+1)R^2 < b^2$.

84. а) Область ограничена двумя параболой $y = 9 - x^2$ и $y = x^2$, причем парабола $y = 9 - x^2$ области не принадлежит, равно как и точки пересечения парабол;

г) область ограничена снизу параболой $y = \frac{1}{2}x^2$, часть дуги которой между точками $A(1; \frac{1}{2})$ и $B(2; 2)$ (пересечениями параболы с прямой) заменена хордой,

85. а) Хорда AB окружности с центром $O(1; -2)$ и радиусом $\sqrt{34}$. Координаты точек A и B получаем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 29 = 0, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Имеем $A(4; -7)$ и $B(-\frac{6}{5}; \frac{17}{5})$.

86. Множество нечетных чисел.

89. д) Множество $A \cup B$ — отрезок $[1; 7]$. Множество $(A \cup B) \cap C$ — отрезок $[1; 3]$. Значит, $((A \cup B) \cap C) \cup D$ — отрезок $[1; 5]$.

90. б) Ученики, знающие английский язык или знающие как французский, так и немецкий языки (включая и ученики, знающие все три языка).

91. в) Решая уравнение $|x-7| + |x+3| = 10$, получим $-3 \leq x \leq 7$, а из уравнения $|x-2| + |x+10| = 12$ находим $-10 \leq x \leq 2$. Совокупности уравнений удовлетворяют числа отрезка $[-10; 7]$.

94. а) Из неравенства $2x-3 > x+5$ находим $x > 8$, а из $x^2-4x+3 > 0$ получаем $x < 1$ или $x > 3$. Объединением множеств $x > 8$, $x < 1$ и $x > 3$ является множество $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

96. $A \setminus B$ задается неравенством $1 \leq x < 2$, $B \setminus A$ — неравенством $4 < x \leq 6$, а $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — объединение этих промежутков.

98. Прямоугольные или остроугольные треугольники.

100. Правильные n -угольники при $n \geq 4$.

101. Разность множеств в первом и втором столбцах.

102. $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, где A — множество в первом столбце, а B — во втором.

108. Уравнению $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ставим в соответствие номер $N = 2^a 3^b 5^c 7^d$.

109. Уравнению $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ставим в соответствие номер

$$N = 2^a |3^{\alpha} 5^b |7^{\beta} 11^{\gamma} |13^{\gamma} 17^{\delta} |19^{\delta},$$

где α равно нулю, если $a \geq 0$, и равно 1, если $a < 0$. Аналогичный смысл имеют β , γ , δ .

110. Если точка M имеет координаты $(\frac{p}{q}; \frac{r}{s})$, где дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ несократимы, причем $q > 0$, $s > 0$, то ей

ставится в соответствие номер

$$N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot 11^{\alpha_4} \cdot 13^{\alpha_5},$$

где $\alpha = 0$, если $p \geq 0$, и $\alpha = 1$, если $p < 0$. Аналогичный смысл имеет β .

111. Предположим, что такие последовательности можно занумеровать. Обозначим последовательность, получившую номер n , так: $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}, \dots$. Построим новую последовательность, положив $y_n = 1$, если $x_{nn} \neq 1$, и $y_n = 2$, если $x_{nn} = 1$. Эта последовательность не получила номера, так как отличается от каждой из занумерованных последовательностей хоть в одном элементе.

112. Нет, так как одна и та же окружность может соответствовать разным квадратам.

114. Нет, так как вокруг любой окружности можно описать два правильных треугольника, сторона которого параллельна данной прямой.

116. Это соответствие взаимно-однозначно.

117. Нет, поскольку одно и то же положительное число может удовлетворять различным уравнениям указанного вида.

118. Это соответствие взаимно-однозначно.

119. Нет, поскольку числа $-a$ и a переходят в одно и то же число.

120. Это соответствие взаимно-однозначно.

Обращение к учителю

Понятие множества является одним из основных понятий математики. В настоящее время большинство разделов математики построены на базе теоретико-множественных идей. Использование множеств и операций над ними позволяет осветить с более современных позиций и целый ряд разделов школьной математики. В то же время основные понятия теории множеств настолько просты и ясны, что их можно начинать преподавать весьма рано. Элементы теории множеств включены в число тем факультативных занятий для VIII класса. На них отводится 20 часов — 10 часов на изучение понятия множества и основных операций над ними и 10 часов на изучение бесконечных множеств. Мы полагаем, что более целесообразным является такое распределение часов: 14 часов на первый раздел и 6 часов на второй.

При проведении занятий по теории множеств следует уделить внимание разбору примеров множеств из окружающего мира. Надо научить школьников видеть конкретные примеры множеств, подмножеств, пересечений и объединений множеств и т. д. В то же время надо разобрать достаточное число примеров из уже известных школьникам вопросов математики, научить подходить к этим вопросам с теоретико-множественных позиций. Здесь особенно важны примене-

ния к теории уравнений и неравенств. Такие понятия, как система уравнений и неравенств, совокупность уравнений и неравенств, получают естественное истолкование на языке теории множеств.

Предлагаемый материал содержит как необходимые теоретические положения, так и задачи для решения в классе и дома. Некоторые из этих задач могут быть использованы для проведения контрольных работ. Большинство задач тесно связано с решением уравнений и неравенств, графиками простейших функций. Здесь есть задачи на отыскание точек пересечения кривых, решение систем уравнений высших степеней и т. д. Разумеется, решение всех приведенных здесь задач не является строго обязательным. Однако желательно, чтобы после изучения факультативного курса ученики умели решать задачи, аналогичные приведенным в тексте.

Разбивка материала по занятиям существенно зависит от уровня подготовки учащихся. Примерная разбивка такова:

1-е занятие (2 часа). Понятие множества. Способы задания множеств. Пустое множество.

2-е занятие (2 часа). Числовые множества. Множество корней уравнения. Область определения уравнения.

3 — 4-е занятия (4 часа). Множество точек на плоскости. Уравнения линий. Решение неравенств с двумя неизвестными.

5-е занятие (2 часа). Подмножества. Пересечение множеств. Системы уравнений и неравенств.

6-е занятие (2 часа). Объединение множеств. Совокупность уравнений и неравенств.

7-е занятие (2 часа). Разбиение множеств. Вычитание множеств. Алгебра множеств.

8-е занятие (2 часа). Счетные множества.

9-е занятие (2 часа). Несчетность континуума.

10-е занятие (2 часа). Взаимно-однозначное соответствие. Мощность множества.

И. М. Гельфанд,

Е. Г. Глаголева,

А. А. Кириллов

Когда вы будете читать в газете сообщение о запуске нового спутника, обратите внимание на слова: «Спутник вышел на орбиту, близкую к расчетной». Подумайте, как можно рассчитывать, т. е. изучать в числах, орбиту спутника — некоторую линию. Ведь для этого надо уметь переводить на язык чисел геометрические понятия и в первую очередь уметь определять положение точки в пространстве (или на плоскости, или на поверхности Земли и т. д.) с помощью чисел.

Метод координат — это способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов.

Числа, с помощью которых определяется положение точки, называются координатами точки.

Хорошо известные вам географические координаты определяют положение точки на поверхности Земли — каждая точка на земной поверхности имеет две координаты: широту и долготу.

Чтобы найти положение точки в пространстве, нужны уже не два числа, а три. Например, чтобы определить положение спутника, можно указать высоту его над поверхностью Земли, а также широту и долготу точки, над которой он находится.

Если же известна траектория спутника, т. е. линия, по которой он движется, то, чтобы найти положение спутника на этой линии, достаточно указать одно число: например, можно указать расстояние, пройденное спутником от некоторой точки траектории¹.

¹ Иногда говорят, что линия имеет одно измерение, поверхность — два измерения, а пространство — три. При этом под числом измерений понимают число координат, определяющих положение точки.

Точно так же применяют метод координат для определения положения точки на линии железной дороги: указывают номер километрового столба. Этот номер и является координатой точки на железнодорожной линии. Например, в названии «Платформа 42-й километр» число 42 — это координата станции.

Своеобразные координаты используются в шахматах, где положение фигуры на доске определяется с помощью буквы и числа. Вертикальные ряды клеток обозначаются буквами латинского алфавита, горизонтальные ряды — цифрами. Каждой клетке доски соответствует буква, указывающая вертикальный ряд, в котором стоит клетка, и цифра, указывающая горизонтальный ряд. На нашем рисунке (рис. 1) белая пешка стоит на клетке $a2$, черная — на $c4$. Таким образом, $a2$ можно считать координатами белой пешки, $c4$ — координатами черной.

Применение координат в шахматах позволяет играть в шахматы по переписке. Чтобы сообщить ход, нет надобности рисовать доску и расположение фигур. Достаточно, например, сказать: «Гроссмейстер сыграл $e2 - e4$ », и всем уже известно, как начата партия.

Координаты, применяемые в математике, позволяют определять с помощью чисел положение любой точки пространства, или плоскости, или линии. Это дает возможность «шифровать» различного рода фигуры, записывать их при помощи чисел. Один из примеров такого рода шифровки вы найдете в упражнении 22 к § 2.

Особенно важен метод координат тем, что он позволяет применять современные вычислительные машины не только к различного рода расчетам, но и к решению геометрических задач, к исследованию любых геометрических объектов соотношений.

Мы начнем знакомство с координатами, применяемыми в математике, с разбора самого простого случая: с определения положения точки на прямой.

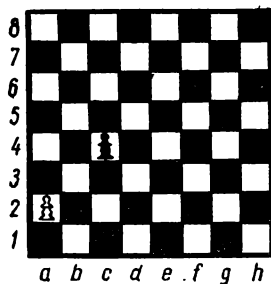


Рис. 1

§ 1. Координаты точки на прямой

1. Числовая ось. Чтобы задать положение точки на прямой, поступают следующим образом. На прямой выбирают *начало отсчета* (некоторую точку O), *единицу масштаба* (отрезок e) и *направление*, которое будет считаться положительным (на рисунке 2 указано стрелкой).

Прямая, на которой указаны *начало отсчета*, *единица масштаба* и *положительное направление*, называется *числовой осью*.

Для определения положения точки на числовой оси достаточно назвать одно число, например $+5$. Это будет означать, что точка лежит на расстоянии 5 единиц масштаба от начала отсчета в положительном направлении.

Число, определяющее положение точки на числовой оси, называется *координатой точки* на этой оси.

Координата точки на числовой оси равна расстоянию точки от начала отсчета, выраженному в выбранных единицах масштаба и взятому со знаком плюс, если точка лежит в положительном направлении от начала, и со знаком минус — в противном случае. Начало отсчета часто называют *началом координат*. Координата начала отсчета (точки O) равна нулю.

Употребляют обозначения: $M(-7)$, $N(a)$ и т. д. Первая запись обозначает точку M с координатой минус семь, вторая — точку N с координатой a . Часто говорят коротко: «точка минус семь», «точка a » и т. п.

Введя координаты, мы установили соответствие между числами и точками прямой линии. При этом оказывается, что каждой точке прямой соответствует одно определенное число и каждому числу соответствует одна определенная точка прямой. Такое соответствие называется *взаимно-однозначным*.

На первый взгляд это кажется совсем простым — установить взаимно-однозначное соответствие между точками прямой и числами.

Однако когда математики задумались над этим, то оказалось, что для выяснения точного смысла слов, входящих в эту фразу, нужно создать большую и сложную теорию. Так, сразу же возникают два «простых» вопроса, на которые трудно ответить: что такое число и что следует понимать под точкой?

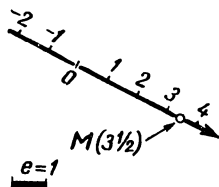


Рис. 2

Несмотря на то, что вопрос об определении положения точки на пря-

мой является крайне простым, необходимо внимательно в нем разобраться, чтобы привыкнуть видеть за числовыми соотношениями геометрические и обратно.

Упражнения

1. а) Нарисуйте на числовой оси точки: $A(-2)$, $B(\frac{13}{3})$, $K(0)$.

б) На числовой оси нарисуйте точку $M(2)$. Найдите на числовой оси две точки A и B , находящиеся от точки M на расстоянии трех единиц. Чему равны координаты точек A и B ?

2. а) Известно, что точка $A(a)$ лежит правее¹ точки $B(b)$. Какое число больше: a или b ?

б) Не рисуя точек на числовой оси, скажите, какая из двух точек правее: $A(-3)$ или $B(-4)$, $A(3)$ или $B(4)$, $A(3)$ или $B(-4)$, $A(-3)$ или $B(4)$?

3. Какая из двух точек правее: $A(a)$ или $B(-a)$?

Ответ. Неизвестно. Если a — положительное число, то A правее, чем B ; если же a — отрицательное число, то B правее, чем A .

4. Подумайте, какая из двух точек правее: а) $M(x)$ или $N(2x)$; б) $A(c)$ или $B(c+2)$; в) $A(x)$ или $B(x-a)$.

Ответ к упр. 4 в. Если a больше нуля, то правее A ; если a меньше нуля, то правее B . Если $a=0$, то A и B совпадают.

5. Нарисуйте на числовой оси точки $A(-5)$ и $B(7)$. Найдите координату середины отрезка AB .

6. Отметьте на числовой оси красным карандашом точки, координаты которых: а) целые числа; б) положительные числа.

7. Отметьте на числовой оси все точки x , для которых: а) $x < 2$; б) $x \geq 5$; в) $2 < x < 5$; г) $-3\frac{1}{4} \leq x \leq 0$.

2. Абсолютная величина числа. Абсолютной величиной числа a (или модулем числа a) называется расстояние точки $A(a)$ от начала координат.

Модуль числа a обозначается так: $|a|$ — модуль a .

Например, $|-3| = 3$, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

¹ Здесь и далее предполагается, что ось расположена горизонтально и положительным направлением является направление слева направо.

Так как точки a и $-a$ расположены на одинаковом расстоянии от начала координат, то у чисел a и $-a$ абсолютная величина одинаковая: $|a| = |-a|$.

Ясно, что абсолютная величина всякого положительного числа a равна самому числу a , т. е. если $a > 0$, то $|a| = a$; абсолютная величина всякого отрицательного числа a равна противоположному ему положительному числу $-a$, т. е. если $a < 0$, то $|a| = -a$; абсолютная величина нуля равна нулю, т. е. если $a = 0$, то $|a| = 0$.

Эти три фразы тоже можно считать определением модуля (абсолютной величины) числа a . Или, короче:

Определение

$$|a| = a \quad \text{при } a > 0,$$

$$|a| = -a \quad \text{при } a < 0,$$

$$|a| = 0 \quad \text{при } a = 0.$$

Упражнения

8. Какие значения может принимать выражение $\frac{|x|}{x}$?

9. Как записать без знака модуля выражения: а) $|a^2|$; б) $|a-b|$, если $a > b$; в) $|a-b|$, если $a < b$; г) $|-a|$, если a — отрицательное число?

10. Известно, что $|x-3| = x-3$. Каким может быть x ?

11. Где на числовой оси лежат точки x , для которых

а) $|x| = 2$; б) $|x| > 3$;

в) $x \leq 5$; г) $3 < |x| < 5$?

д) Укажите, где лежат точки, для которых $|x-2| = 2-x$.

Решение упр. б). Если x — положительное число, то $|x| = x$, следовательно, $x > 3$; если x — отрицательное число, то $|x| = -x$; тогда из неравенства $-x > 3$ следует, что $x < -3$.

Ответ. Все точки, расположенные левее точки с координатой (-3) , и все точки, расположенные правее точки с координатой (3) .

Ответ можно получить быстрее, если учесть, что модуль числа — это расстояние точки от начала координат. Тогда ясно, что искомые точки расположены от начала координат на расстоянии, большем чем 3. Ответ получаем из рисунка 3.

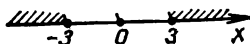


Рис. 3

12. а) Разберем подробно решение следующего уравнения:

$$|x+1|+|x+2|=2. \quad (1)$$

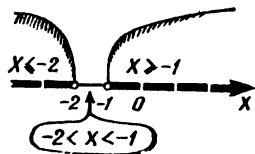


Рис. 4

Так как $|a|=a$ при $a \geq 0$ и $|a|=-a$ при $a < 0$, то выражения $|x+1|$ и $|x+2|$ «раскрываются» по-разному, в зависимости от того, какой знак имеют выражения, стоящие под знаком модуля. Разобьем поэтому все множество значений x на три участка (рис. 4), границами которых являются точки, где обращается в нуль одно из выражений под знаком модуля:

$$1) x \geq -1; \quad 2) -2 < x < -1; \quad 3) x \leq -2.$$

Рассмотрим каждый участок отдельно.

1) $x \geq -1$. Для этих значений x имеем:

$$x+1 \geq 0, \quad x+2 > 0.$$

Следовательно, $|x+1|=x+1$ и $|x+2|=x+2$. Уравнение (1) имеет вид: $2x+3=2$. Корень этого уравнения $-\frac{1}{2}$ удовлетворяет нашему условию $x \geq -1$.

2) При $-2 < x < -1$ уравнение приобретает вид $1=2$. (Проверьте!) Это означает, что никакое число, заключенное между -2 и -1 , не удовлетворяет уравнению (1).

3) Случай $x \leq -2$ рассмотрите самостоятельно.

Ответ. Уравнение (1) имеет два корня: $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{5}{2}$.

б) Решим еще следующее уравнение:

$$|x+1|+|x+2|=1. \quad (2)$$

Ясно, что числовую ось опять придется разбить на те же три участка:

$$x \geq -1, \quad (a)$$

$$-2 < x < -1, \quad (б)$$

$$x \leq -2. \quad (в)$$

Для первого участка уравнение (2) приобретет вид $2x+3=1$. (Объясните почему!)

Это уравнение имеет корень $x = -1$, удовлетворяющий условию (а). Значит, на первом участке имеется одна точка, удовлетворяющая уравнению (2), — конец этого участка.

На втором участке (условие б) $|x+1| = -x-1$ $|x+2| = x+2$, и уравнение (2) имеет вид:

$$-x-1+x+2=1, \text{ или } 1=1,$$

т. е. удовлетворяется тождественно. Значит, любое число из промежутка $-2 < x < -1$ является корнем уравнения (2).

(Проверьте это, подставив какое-нибудь конкретное число, например $-1,5$ или $-1,9$, в уравнение (2).)

Для третьего участка (условие в) уравнение (2) превращается в $-2x-3=1$, откуда $x=-2$.

Следовательно, конец третьего участка тоже является корнем уравнения (2).

Ответ. Уравнение имеет бесконечно много решений: совокупность всех решений заполняет отрезок $-2 \leq x \leq -1$, т. е. любое число, которое больше или равно -2 и меньше или равно -1 , удовлетворяет уравнению.

в) Решите такие уравнения:

$$|x-2|=1; |x-3|+|x+3|=6; |x|+|x-a|=a.$$

3. Расстояние между двумя точками. Начнем с упражнения. Найдите расстояние между точками:

а) $A(-7)$ и $B(-20)$;

б) $A(-3\frac{1}{2})$ и $B(9)$.

Решить эти задачи нетрудно, так как, зная координаты точек, можно разобраться, какая точка правее, какая левее, как они расположены относительно начала координат и т. д. После этого совсем легко сообразить, как вычисляется искомое расстояние.

Теперь предлагаем вам вывести общую формулу для расстояния между двумя точками на числовой оси, т. е. решить такую задачу:

Задача. Даны точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$; определить расстояние $\rho(A, B)$ между этими точками¹.

¹ Обычно для обозначения расстояния используется греческая буква ρ («ро»). Выражение $\rho(A, B)$ означает расстояние между точками A и B .

Решение. Так как теперь конкретные значения координат точек неизвестны, то надо разобрать все возможные случаи взаимного расположения трех точек: A , B и O — начала координат.

Таких случаев шесть. Сначала рассмотрим 3 случая, в которых B правее A (рис. 5, а, б, в).

В первом из них (рис. 5, а) расстояние $\rho(A, B)$ равно разности расстояний точек B и A от начала координат. Так как в этом случае x_1 и x_2 положительны, то

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1.$$

Во втором случае (рис. 5, б) расстояние равно сумме расстояний точек B и A от начала координат, т. е. по-прежнему

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1,$$

поскольку в этом случае x_2 положительно, а x_1 отрицательно.

Покажите, что в третьем случае (рис. 5, в) расстояние будет определяться той же формулой.

Другие три случая (рис. 6) отличаются от разобранных тем, что точки A и B поменялись ролями. В каждом из этих случаев можно проверить, что расстояние между точками A и B равно

$$\rho(A, B) = x_1 - x_2.$$

Итак, во всех случаях, когда $x_2 > x_1$, расстояние $\rho(A, B)$ равно $x_2 - x_1$, а во всех случаях, когда $x_1 > x_2$, это расстояние равно $x_1 - x_2$. Вспоминая определение модуля, можно записать это единой формулой, пригодной во всех шести случаях:

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|. \quad (3)$$

При желании эту формулу можно записать в виде

$$\rho(A, B) = |x_1 - x_2|.$$

$$A(x_1), B(x_2)$$

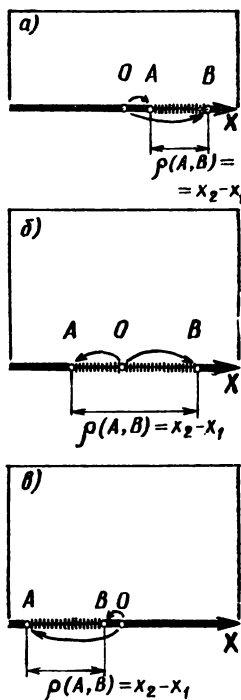


Рис. 5

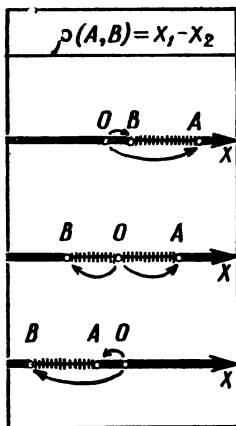


Рис. 6

Если быть педантичным, то нужно разобрать еще случаи, когда $x_2 = x_1$, т. е. когда точки A и B совпадают. Ясно, что и в этом случае

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|.$$

Таким образом, поставленная задача решена полностью.

Упражнения

13. Отметьте на числовой оси точки x , для которых: а) $\rho(x, 7) < 3$; б) $|x - 2| > 1$; в) $|x + 3| = 3$.

14. На числовой оси даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Найдите координату середины отрезка AB .

Примечание. При решении этой задачи вы должны рассмотреть все возможные случаи расположения точек A и B на числовой оси или написать такое решение, которое годилось бы сразу для всех случаев.

15. Найдите координату точки на числовой оси, которая расположена вдвое ближе к точке $A(-9)$, чем к точке $B(-3)$.

16. Решите теперь уравнения а) и б) из упражнения 12, используя понятие расстояния между двумя точками.

Указание. $|x + 1|$ — это расстояние точки X от точки $A(-1)$; $|x + 2|$ — это расстояние той же искомой точки $N(x)$ от точки $B(-2)$. Значит, наше уравнение означает, что нужно найти точку, сумма расстояний от которой до точек $A(-1)$ и $B(-2)$ равна 2.

Теперь ясно, почему для первого уравнения получилось два корня (посмотрите, как они расположены относительно точек $A(-1)$ и $B(-2)$; объясните, почему внутри отрезка AB нет ни одной точки, удовлетворяющей уравнению (1)). Ясно также, почему при решении уравнения (2) мы получили целый отрезок решений: ведь сумма расстояний от любой точки отрезка AB до его концов равна длине этого отрезка.

Контрольный вопрос: почему сразу можно сказать, что уравнение

$$|x + 1| + |x + 2| = \frac{1}{2}$$

не имеет решений?

17. Решите следующие уравнения:

- а) $|x+3|+|x-1|=5$; г) $|x+3|-|x-1|=5$;
 б) $|x+3|+|x-1|=4$; д) $|x+3|-|x-1|=4$;
 в) $|x+3|+|x-1|=3$; е) $|x+3|-|x-1|=3$.

Задача. Найти точку, расположенную в три раза ближе к точке $A(-1)$, чем к точке $B(7)$ (рис. 7).

Решение. Нарисовав точки A и B на числовой оси, можно легко увидеть, что точка $M(1)$ является искомой. Однако это решение неполно, так как есть еще одна точка, удовлетворяющая условию задачи.

Попробуем решить нашу задачу аналитически, используя только что полученную формулу расстояния между двумя точками.

Условие задачи означает, что $3\rho(M, A) = \rho(M, B)$, или, если обозначить через x координату искомой точки M ,

$$3|x+1| = |x-7|.$$

Это уравнение придется решать отдельно для каждого из трех участков: $x > 7$, $-1 < x < 7$, $x < -1$.

На первом участке решений нет (убедитесь в этом!), на втором мы получим уже найденную точку $M(1)$; на третьем участке имеем

$$\begin{cases} x < -1, \\ 3x+3 = x-7, \end{cases}$$

откуда $x = -5$.

Итак, ответ к задаче: $M_1(1)$ и $M_2(-5)$.

Решим теперь общую задачу.

Разделить отрезок AB в некотором отношении λ , если известны точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$.

Решение. Пусть точка $M(x)$ искомая, т. е.

$$\frac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)} = \lambda.$$

Имеем:

$$|x - x_1| = \lambda |x - x_2|.$$

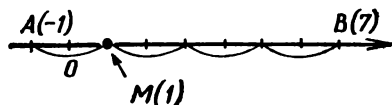


Рис. 7

Если M лежит внутри отрезка AB , то разности $x - x_1$ и $x - x_2$ имеют разные знаки (почему?). Тогда $x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$, откуда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

При разных λ получается разное положение точки M на отрезке AB .

Упражнения

18. При каком λ точка M лежит на середине AB ? Делит отрезок в отношении 1:3, считая от A ? В отношении 3:1, считая от A ?

19. Что будет с точкой M , если λ увеличивать от 0 неограниченно?

20. Есть ли значение λ , при котором точка M совпадает с точкой A ? с точкой B ?

21. При каком λ точка M приблизится к A на $\frac{1}{100} AB$? К B на $0,001 AB$?

Из упражнений мы видели, что при больших λ точка M оказывается как угодно близко к B . Если же λ уменьшать, точка M движется от B к A , и когда $\lambda = 0$, точка M совпадает с A .

А что будет, если λ будет продолжать уменьшаться и станет отрицательным? Естественно предположить, что A будет двигаться дальше и выйдет за отрезок AB . Посмотрите, так ли это (рис. 8). Например, где будет M , если $\lambda = -\frac{1}{100}$? $-0,1$? $-\frac{1}{2}$? А если $\lambda = -2$? При каком λ мы получим точку M задачи 4?

Вывод. Формула (4) может дать *любую* точку прямой AB (кроме одной) при разных λ . При $\lambda > 0$ полу-

чаются точки, лежащие внутри отрезка AB , при $\lambda < 0$ точки, лежащие вне отрезка AB .

Контрольный вопрос. При каких λ получают-ся точки, лежащие вне AB ближе к A , а при каких — ближе к B ?

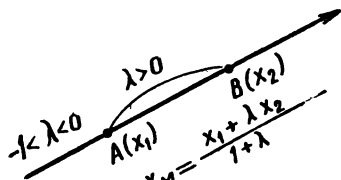


Рис. 8

§ 2. Координаты точки на плоскости

1. Координатная плоскость. Чтобы определить координаты точки на плоскости, проведем в этой плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси. Одну из осей называют *осью абсцисс* или осью x (или Ox), другую — *осью ординат* или осью y (или Oy).

Направление осей обычно выбирают так, чтобы положительная полуось Ox совмещалась с положительной полуосью Oy поворотом на 90° против часовой стрелки (рис. 9). Точку пересечения осей называют *началом координат* и обозначают буквой O . Она является началом отсчета для каждой из двух числовых осей Ox и Oy . Единицы масштаба на этих осях выбираются, как правило, одинаковыми.

Возьмем на плоскости некоторую точку M и опустим из нее перпендикуляры на ось Ox и ось Oy (рис. 10). Точки пересечения M_1 и M_2 этих перпендикуляров с осями называются *проекциями* точки M на оси координат.

Точка M_1 лежит на числовой оси Ox , поэтому ей соответствует определенное число x — ее координата на этой оси. Точно так же точке M_2 соответствует определенное число y — ее координата на оси Oy .

Таким образом, каждой точке M , лежащей на плоскости, ставятся в соответствие два числа x и y , которые называются *прямоугольными декартовыми координатами* точки M . Число x называется *абсциссой* точки M , число y — ее *ординатой*.

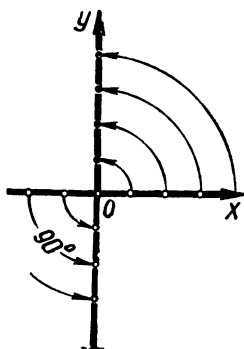


Рис. 9

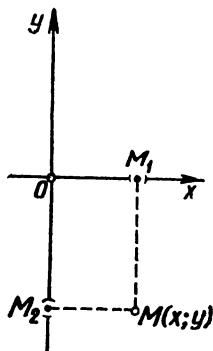


Рис. 10

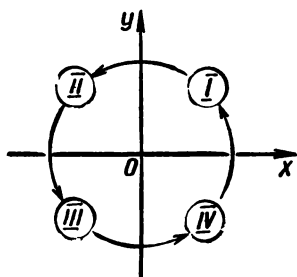


Рис. 11

Обратно, каждым двум числам x и y можно сопоставить некоторую точку плоскости, для которой x является абсциссой, а y — ординатой.

Теперь установлено взаимно-однозначное соответствие¹ между точками плоскости и парами чисел x и y , следующих в определенном порядке (сначала x , затем y).

Итак, *прямоугольными декартовыми координатами* точки

на плоскости называются координаты проекций этой точки на оси координат на этих осях.

Координаты точки M записываются обычно так: $M(x, y)$. На первом месте записывается абсцисса, на втором — ордината. Иногда, для краткости, вместо «точка с координатами $(3, -8)$ » говорят «точка $(3, -8)$ ».

Оси координат делят плоскость на четыре четверти (квадранта). Первой четвертью считается четверть между положительной полуосью Ox и положительной полуосью Oy . Далее четверти нумеруются по порядку против часовой стрелки (рис. 11).

Сделайте несколько упражнений.

Упражнения

Сначала предлагаем вам совсем простые задачи.

22. а) Какое слово здесь зашифровано:

$(6; 2), (9; 2), (12; 0), (11; -2), (9; -2), (4; -2),$
 $(2; -1), (1; 1), (-1; 1), (-2; 0), (-2; -2), (2; 1),$
 $(5; 2), (12; 2), (9; 1), (10; -2), (10; 0), (4; 1), (2; 2),$
 $(-2; 2), (-2; 1), (0; 0), (2; 0), (2; -2), (4; -1), (12; -1),$
 $(12; -2), (11; 0), (7; 2), (4; 0), (9; 0), (4; 2), (12; 1),$
 $(-2; -1)?$

¹ Взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел — это такое соответствие, при котором каждой точке соответствует одна определенная пара чисел и каждая пара чисел соответствует одной определенной точке.

б) «Зашифруйте» аналогичным способом какое-нибудь слово, например «слон». (Конечно, эта задача может иметь много разных решений.)

в) Точка M расположена прямо над точкой $A(-1; 3)$ и выше ее на 5 единиц. Найдите координаты точки M .

23. Не рисуя точки $A(1; -3)$, скажите, в какой четверти она расположена.

24. В каких четвертях может находиться точка, если ее абсцисса положительна?

25. Какие знаки будут у координат точек, расположенных во второй четверти? В третьей четверти? В четвертой?

26. На оси Ox взята точка с координатой -5 . Каковы ее координаты на плоскости?

О т в е т. Абсцисса точки равна -5 , ордината равна нулю.

27. Точки $A(3; 2)$, и $B(a; -1)$, расположены на одной прямой, параллельной оси Oy . Найдите a .

28. Точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ лежат на одной прямой, параллельной Ox . Каким соотношениям удовлетворяют их координаты?

29. Точка M является серединой отрезка OA , соединяющего начало координат O и точку $A(-5; 2)$. Найдите точку M (т. е. надо найти ее координаты).

А вот задачи немного посложнее:

30. Нарисуйте точки $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$ и $D(0; 0)$. Если вы правильно нарисовали, то у вас получились вершины квадрата. Какова длина стороны этого квадрата? Какова его площадь¹? Найдите координаты середин сторон квадрата. Не можете ли вы доказать, что $ABCD$ — квадрат? Придумайте еще четыре точки (укажите их координаты) так, чтобы они служили вершинами квадрата.

31. Нарисуйте правильный шестиугольник $ABCDEF$. Возьмите точку A за начало координат, ось абсцисс направьте от A к F , за единицу масштаба возьмите отрезок AF . Найдите координаты всех вершин этого шестиугольника. Сколько решений имеет задача?

32. а) Три точки $A(0; 0)$, $B(1; 3)$ и $C(5; -2)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите четвертую вершину (т. е. координаты точки D).

¹ За единицу измерения площади мы выбираем площадь квадрата, сторона которого равна единице масштаба на осях.

б) Найдите четвертую вершину параллелограмма, если первые три лежат в точках $A(1000; 1)$, $B(532; 8)$ и $C(-283; 5)$.

33. Решите теперь эти задачи в общем виде: на плоскости даны точки $A(0; 0)$, $B(x_1; y_1)$ и $C(x_2; y_2)$. Какие координаты должна иметь точка D , чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом?

34. Какие координаты будут у точки, симметричной точке $M(a; b)$ относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) начала координат?

У к а з а н и е. При решении задачи возьмите точку M , например, в III четверти. Получив ответ, убедитесь, что он годится для всех случаев расположения точки M .

2. Соотношения, связывающие координаты. Если известны обе координаты точки, то положение ее на плоскости вполне определяется. Что можно сказать о положении точки, если известна только одна из ее координат? Например, где лежат все точки, у которых абсцисса равна 3? Где расположены все точки, у которых одна координата (но неизвестно какая) равна 3?

Задание одной из двух координат определяет, вообще говоря, некоторую линию. Этот факт даже лег в основу сюжета романа Жюль Верна «Дети капитана Гранта». Герои книги знали только одну из координат места кораблекрушения (широту). Поэтому, чтобы осмотреть все возможные точки, они были вынуждены обойти Землю по целой параллели — линии, для каждой из точек которой южная широта равна $37^{\circ}11'$.

Соотношения между координатами тоже чаще всего определяют не одну точку, а некоторое множество (совокупность) точек. Например, если отметить все точки, у которых абсцисса равна ординате, т. е. точки, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x = y,$$

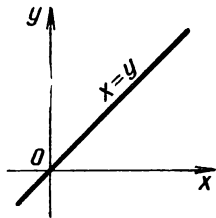


Рис. 12

то получится прямая линия — биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 12), что нетрудно доказать.

Иногда вместо «множество точек» говорят «геометрическое место точек». Например, геометрическое место то-

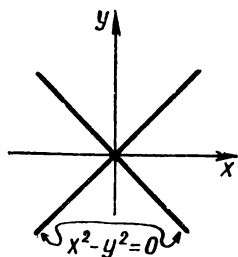


Рис. 13

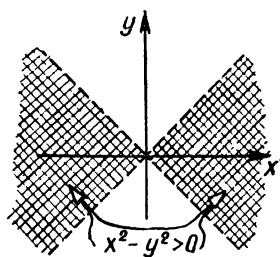


Рис. 14

чек, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$x = y$$

— это, как мы только что говорили, биссектриса первого и третьего координатных углов.

Не следует думать, что всякое соотношение между координатами задает обязательно линию на плоскости. Например, вы легко можете убедиться, что соотношению $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной точки на плоскости (оно определяет так называемое «пустое» множество). Соотношение

$$x^2 - y^2 = 0$$

задает на плоскости пару взаимно перпендикулярных прямых (рис. 13).

Соотношение $x^2 - y^2 > 0$ задает целую область (рис. 14). Соотношению $xy = 0$ удовлетворяют все точки, лежащие на координатных осях (и только такие точки).

Соотношению $x > 0$ удовлетворяют точки полуплоскости, лежащей справа от оси Oy , соотношениям $x < 0$, $y = 0$ удовлетворяют точки отрицательной полуоси Ox и т. д.

Упражнения

35. Какие множества точек определяются соотношениями:

а) $|x| = |y|$;

г) $[x] = [y]^1$;

б) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$;

д) $x - [x] = y - [y]$;

в) $|x| + x = |y| + y$;

е) $x - [x] > y - [y]$?

¹ Символом $[x]$ обозначают целую часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $[3,5] = 3$, $[5] = 5$, $[-2,5] = -3$.

36. Прямолинейная дорога отделяет луг от пашни. Пешеход передвигается по дороге со скоростью 5 км/ч, по лугу — со скоростью 4 км/ч, по пашне — со скоростью 3 км/ч. В начальный момент пешеход стоит на дороге. Нарисуйте область, состоящую из тех точек, в которые пешеход может попасть за 1 час.

37. Плоскость делится осями координат на четыре четверти. По I и III четвертям (включая оси координат) можно передвигаться со скоростью a , а по II и IV (исключая координатные оси) — со скоростью b . Нарисуйте множество точек, в которые можно попасть из начала координат за некоторое заданное время, если при этом:

- скорость a вдвое больше, чем b ;
- скорости связаны соотношением:

$$a = b \cdot \sqrt{2}.$$

Можно поставить и обратные задачи: найти соотношение, которому удовлетворяют координаты точек некоторой геометрической фигуры, некоторого множества точек.

Упражнения

38. Какому соотношению удовлетворяют координаты точек:

- прямой, параллельной Oy и отстоящей вправо на 3 единицы, влево — на 5 единиц;
- прямой, параллельной Ox , лежащей выше ее на 7 единиц? Ниже на 3 единицы;
- биссектрисы второго и четвертого координатного углов;

г) оси Oy ;

д) полуплоскости, лежащей справа от прямой упражнения а), снизу от прямой упражнения б);

е) области, заключенной между осью Ox и прямой, параллельной Ox и отстоящей вверх на 1;

ж) квадрата $OABC$ (рис. 15)?

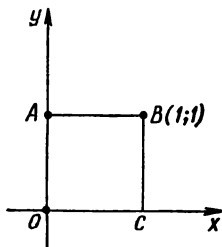


Рис. 15

3. Расстояние между двумя точками. Мы с вами умеем теперь говорить о точках на языке чисел. Например, нам уже нет необходимости объяснять: возьмите точку,

находящуюся на три единицы правее оси Oy и на пять единиц ниже оси Ox . Достаточно сказать просто: возьмите точку (3; —5).

Мы говорили уже, что это создает определенные преимущества. Так, мы можем рисунок, составленный из точек, передать по телеграфу, сообщить его вычислительной машине, которая совсем не понимает чертежей, а числа понимает хорошо.

В предыдущем пункте мы задали при помощи соотношений между числами некоторые множества точек на плоскости. Теперь попробуем последовательно перевести на язык чисел другие геометрические понятия и факты.

Мы начнем с простой и обычной задачи: найти расстояние между двумя точками плоскости.

Как всегда, мы считаем, что точки заданы своими координатами, и тогда наша задача состоит в том, чтобы найти правило, по которому можно вычислить расстояние между точками, зная их координаты. При выводе этого правила, конечно, разрешается прибегать к чертежу, но само правило не должно содержать никаких ссылок на чертеж, а должно только показывать, какие действия и в каком порядке надо совершать над данными числами — координатами точек, чтобы получить искомое число — расстояние между точками.

Быть может, некоторым из читателей этот подход к решению задачи покажется странным и надуманным. Чего проще, скажут они, точки заданы, пусть даже координатами. Нарисуйте эти точки, возьмите линейку и измерьте расстояние между ними.

Этот способ иногда не так уж плох. Однако представьте себе опять, что вы имеете дело с вычислительной машиной. В ней нет линейки, и она не рисует, но зато считать она умеет настолько быстро¹, что это для нее вообще не составляет никакой проблемы. Заметьте, что наша задача поставлена так, чтобы правило вычисления расстояния между двумя точками состояло из команд, которые может выполнить машина.

Поставленную задачу лучше сначала решить для частного случая, когда одна из данных точек лежит в начале

¹ Современная вычислительная машина делает сотни тысяч операций сложения и умножения в секунду.

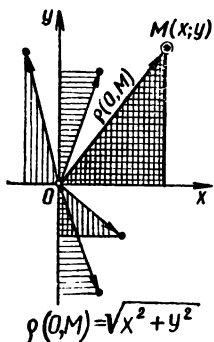


Рис. 16

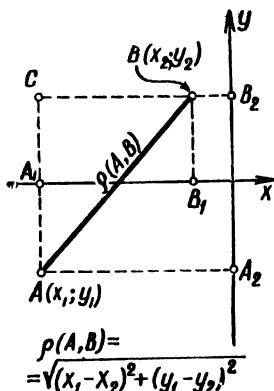


Рис. 17

координат. Начните с нескольких числовых примеров: найдите расстояние от начала координат точек $(12; 5)$; $(-3; 15)$ и $(-4; -7)$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

Теперь напишите общую формулу для вычисления расстояния точки от начала координат (рис. 16).

О т в е т. Расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат определяется по формуле

$$\rho(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Очевидно, правило, выражаемое этой формулой, удовлетворяет поставленным выше условиям. В частности, им можно пользоваться при вычислении на машинах, которые способны умножать числа, складывать их и извлекать квадратные корни.

Теперь решим общую задачу.

Задача. Даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$; найти расстояние $\rho(A, B)$ между ними.

Решение. Обозначим через A_1, B_1, A_2, B_2 (рис. 17) проекции точек A и B на оси координат.

Точку пересечения прямых AA_1 и BB_2 обозначим буквой C . Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора получаем¹:

$$\rho^2(A, B) = \rho^2(A, C) + \rho^2(B, C). \quad (5)$$

¹ Через $\rho^2(A, B)$ мы обозначаем квадрат расстояния $\rho(A, B)$.

Но длина отрезка AC равна длине отрезка A_2B_2 . Точки A_2 и B_2 лежат на оси Oy и имеют соответственно координаты y_1 и y_2 . Согласно формуле, полученной в п. 3, расстояние между ними равно $|y_1 - y_2|$.

Аналогично рассуждая, получим, что длина отрезка BC равна $|x_1 - x_2|$. Подставляя найденные значения AC и BC в формулу (5), получаем:

$$\rho^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Таким образом, $\rho(A, B)$ — расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — вычисляется по формуле:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (6)$$

Заметим, что все наши рассуждения обслуживают не только такое расположение точек, как на рисунке 17, но и любое другое.

Сделайте другой чертеж (например, возьмите точку A в I четверти, а точку B — во II) и убедитесь, что все рассуждения можно будет дословно повторить, не меняя даже обозначений точек.

Заметим еще, что формулу (3) для расстояния между точками на прямой (стр. 181) можно переписать в аналогичном виде¹:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

Упражнения

39. На плоскости даны три точки $A(3; -6)$, $B(-2; 4)$ и $C(1; -2)$. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

У к а з а н и е. Покажите, что одна из сторон «треугольника» ABC равна сумме двух других его сторон.

¹ Мы пользуемся тем, что $\sqrt{x^2} = |x|$ (имеется в виду арифметическое значение корня). Неаккуратное использование этого правила (иногда ошибочно считают, что $\sqrt{x^2} = x$) может привести к неправильным выводам. Для примера мы приводим цепь заключений, содержащую такого рода неточность, и предлагаем вам обнаружить ее:

$$\begin{aligned} 1 - 3 &= 4 - 6 \Rightarrow 1 - 3 + \frac{9}{4} = 4 - 6 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow 1 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow 1 = 2. \end{aligned}$$

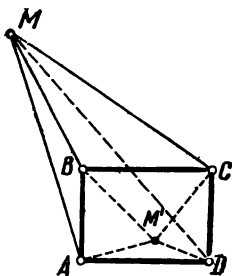


Рис. 18

40. Примените формулу расстояния между точками для доказательства известной вам теоремы: в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей.

Указание. Возьмите одну из вершин параллелограмма за начало координат и воспользуйтесь результатами задачи 33. Вы увидите, что доказательство теоремы сведется к проверке простого алгебраического тождества. Какого?

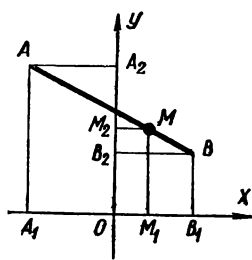


Рис. 19

41. Докажите с помощью метода координат следующую теорему: если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M справедливо равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ (рис. 18). Как удобнее расположить оси координат?

Формула деления отрезка в данном отношении, полученная для прямой (стр. 184), поможет нам получить аналогичную формулу для отрезков, лежащих в плоскости. Пусть даны две точки (рис. 19) $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и требуется разделить отрезок AB в отношении λ . Пусть A_1, B_1 и M_1 — проекции концов отрезка и искомой точки M на ось Ox , A_2, B_2 и M_2 — проекции этих точек на Oy . Ясно, что точки M_1 и M_2 делят соответственно отрезки A_1B_1 и A_2B_2 в том же отношении λ .

Поэтому

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{и} \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (7)$$

Упражнения

42. Даны три точки $A(0; 0)$, $B(1; -2)$, $C(-7; 5)$. Найдите координаты центра тяжести треугольника ABC .

Указание. Центр тяжести треугольника совпадает с пересечением медиан.

Ответ: $(-2; 1)$.

43. Докажите аналитически, что диагонали в параллелограмме, пересекаясь, делятся пополам.

Указание. Выбрав поудобнее оси координат (см., например, рис. 20), докажите, что середины диагоналей совпадают.

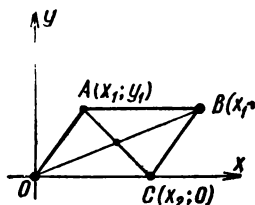


Рис. 20

44. Докажите, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке.

Указание. Воспользуйтесь тем, что при пересечении медианы делятся в отношении 1 : 2.

45. Решите задачу 44 в общем виде: пусть $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ — вершины некоторого треугольника. Найдите координаты точки O — точки пересечения медиан этого треугольника.

Ответ: $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

46. Проведите прямую через начало координат O и точку $A(1; k)$. Покажите, что любая точка M с координатами $(x; kx)$ лежит на этой прямой.

Указание. Докажите, что сумма или разность расстояний от точки M до точек O и A равна расстоянию OA , т. е. докажите тождество:

$$\sqrt{x^2 + kx^2} \pm \sqrt{(x-1)^2 + (kx-k)^2} = \pm \sqrt{1+k^2}.$$

4. Задание фигур. Всякую фигуру мы рассматриваем как совокупность точек, из которых она состоит, и задать фигуру — это значит задать способ, по которому можно было бы узнавать, принадлежит ли та или иная точка рассматриваемой фигуре или нет.

Чтобы найти такой способ, например, для окружности, воспользуемся определением окружности как множества точек, расстояния которых от некоторой точки C (центра окружности) равно числу R (радиусу). Значит, чтобы точка $M(x; y)$ (рис. 21) лежала на окружности с центром $C(a; b)$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(M, C)$ было равно R .

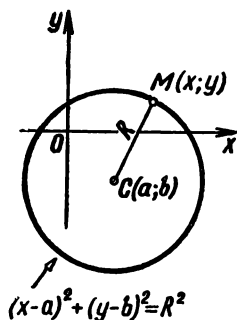


Рис. 21

Вспомним, что расстояние между точками определяется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Следовательно, условие того, что точка $M(x; y)$ лежит на окружности с центром $C(a; b)$ и радиусом R , выражается соотношением $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$, которое можно переписать в виде:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (8)$$

Таким образом, чтобы проверить, лежит ли какая-нибудь точка на окружности, нужно проверить, удовлетворяется ли соотношение (8) для этой точки. Для этого нужно подставить в (8) вместо x и y координаты рассматриваемой точки. Если мы получим тождество, то точка лежит на окружности, в противном случае точка не лежит на окружности. Итак, зная уравнение (8), мы можем про любую точку плоскости сказать, лежит она на окружности или нет. Поэтому уравнение (8) называют уравнением окружности с центром $C(a; b)$ и радиусом R .

Упражнения

47. Напишите уравнение окружности с центром $C(-2; 3)$ и радиусом 5. Проходит ли эта окружность через точку $(2; -1)$?

48. Покажите, что уравнение

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

задает на плоскости некоторую окружность. Найдите ее центр и радиус.

У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1, \text{ или } (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

49. Какое множество точек задает соотношение

$$x^2 + y^2 \leq 4x + 4y?$$

Р е ш е н и е. Перепишем это неравенство:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leq 8,$$

или

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8.$$

Как теперь ясно, это соотношение выражает, что расстояние точки искомого множества от точки $(2; 2)$ меньше или равно $\sqrt{8}$. Очевидно, что точки, удовлетворяющие этому условию, заполняют круг радиуса $\sqrt{8}$ с центром в $(2; 2)$. Так как в соотношении допускается равенство, то граница круга тоже принадлежит искомому множеству.

Мы убедились в том, что окружность на плоскости можно задать с помощью некоторого уравнения. Таким же образом можно задавать и другие линии, только уравнения, конечно, будут выглядеть иначе.

Мы уже говорили, что уравнение $x^2 - y^2 = 0$ задает пару прямых (стр. 189). Остановимся на этом подробнее. Если $x^2 - y^2 = 0$, то $x^2 = y^2$ и, следовательно, $|x| = |y|$. Обратно, если $|x| = |y|$, то $x^2 = y^2$; поэтому эти соотношения равносильны. Но абсолютная величина абсциссы точки — это расстояние ее от оси Oy , а абсолютная величина ординаты — расстояние точки от оси Ox . Значит, точки, для которых $|x| = |y|$, одинаково удалены от осей координат, т. е. лежат на двух биссектрисах углов, образованных этими осями. Ясно, что и обратно: координаты любой точки на каждой из этих двух биссектрис удовлетворяют соотношению $x^2 = y^2$. Поэтому уравнение $x^2 - y^2 = 0$ мы называем уравнением совокупности этих двух биссектрис.

Вы, конечно, знаете и другие примеры задания линий с помощью уравнений. Например, уравнению $y = x^2$ удовлетворяют все точки параболы с вершиной в начале координат, и только точки этой параболы (рис. 22). Уравнение $y = x^2$ называется уравнением этой параболы.

Вообще уравнением некоторой линии называется уравнение, которое обращается в тождество всякий раз, когда вместо x и y подставляют координаты любой точки этой линии, и не удовлетворяется, если подставить координаты точки, не лежащей на этой линии.

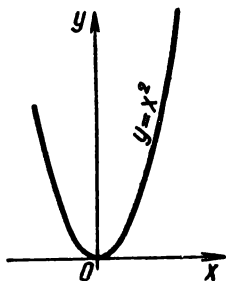


Рис. 22

По уравнениям линий можно узнавать их свойства. Например, даже не зная, какую линию задает уравнение

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2, \quad (9)$$

мы можем сказать, что эта линия проходит через начало координат, потому что точка $(0; 0)$ удовлетворяет уравнению, а точка $(1; 1)$ не лежит на этой кривой, потому что $(1^2 + 1^2 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$.

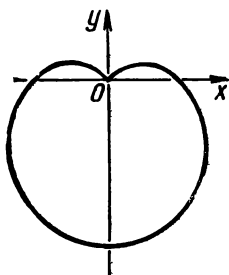


Рис. 23

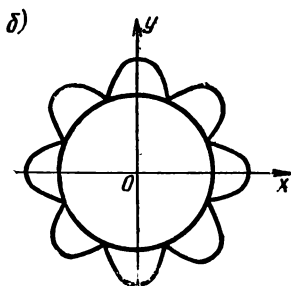
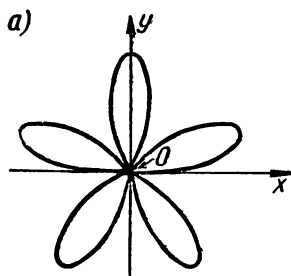


Рис. 24

Упражнения

50. Докажите, что кривая, заданная уравнением (9), симметрична относительно Oy .

Эта кривая изображена на рисунке 23. Она называется *кардиоидой*, потому что она имеет форму сердца.

Так что, если бы вычислительная машина могла чувствовать к кому-нибудь симпатию, то, вероятно, она бы передала ему в виде уравнения рисунок сердца, а может быть, преподнесла бы математический «букет» — уравнения кривых, изображенных на рисунке 24; как видите, эти кривые действительно похожи на цветы. Уравнения этих математических цветов мы напишем позже, когда вы позна-

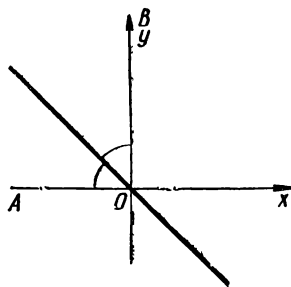


Рис. 25

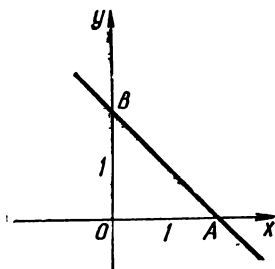


Рис. 26

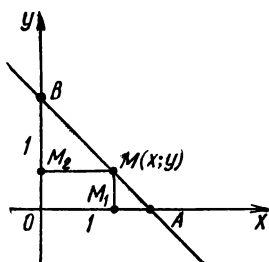


Рис. 27

комитесь с другими координатами, так называемыми полярными. А сейчас решим несколько задач на составление уравнений прямых.

51. Напишите уравнение биссектрисы угла AOB (рис. 25).

52. Прямая отсекает на осях координат отрезки, равные 1 (рис. 26). Найдите зависимость между координатами точек этой прямой.

Решение. а) Пусть точка $M(x; y)$ лежит на нашей прямой (рис. 27). Тогда $OM_1 = x$, $OM_2 = y$. Так как $\angle OAB = 45^\circ$, то $M_2B = M_2M = x$. Но $OM_2 + M_2B = 1$, откуда видно, что координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяют уравнению $x + y = 1$;

б) проверьте, что это соотношение выполняется для точки $M'(x; y)$, лежащей ниже оси Ox (рис. 28).

Решение. x для точки M' положителен и равен OM'_1 — длине отрезка OM'_1 , y — отрицателен и равен $(-OM'_2)$. Отсюда ясно, что сумма положительного числа x и отрицательного числа y тоже равна 1:

$$x + y = OM'_1 + (-OM'_2) = OM'_1 - OM'_2 = BM'_2 - OM'_2 = 1.$$

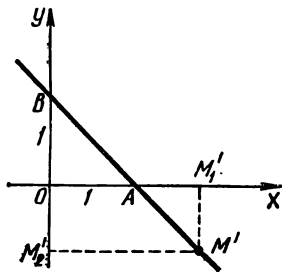


Рис. 28

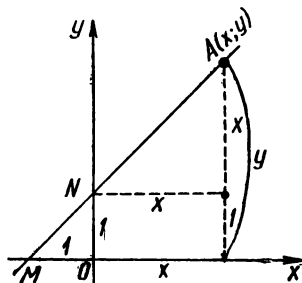


Рис. 29

Ответ. Координаты любой точки прямой AB удовлетворяют уравнению $x+y=1$. Это уравнение можно записать в другом виде:

$$y = -x + 1.$$

53. Найдите соотношение между координатами точек MN (рис. 29), если $OM = ON = 1$.

Решение. Из чертежа ясно, что для точки A ордината y больше абсциссы x на 1, т. е.

$$y = x + 1.$$

Проверьте, что этому соотношению удовлетворяют координаты точек прямой, лежащих во II четверти и в III четверти.

54. Нарисуйте множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$|x| + |y| = 1.$$

55. Нарисуйте прямую $y = -x$.

56. Нарисуйте на одном чертеже прямые: 1) — 4), а также 5) — 8).

1) $y = x + 1$; 5) $+x + y = 1$;

2) $y = x - 1$; 6) $+x - y = 1$;

3) $y = -x + 1$; 7) $-x + y = 1$;

4) $y = -x - 1$; 8) $-x - y = 1$.

Сравните полученный результат с результатом задачи 54.

Задача. Положение прямой определено, если дан угол α — угол наклона ее к оси Ox и отрезок b , отсекаемый этой прямой на оси ординат (рис. 30).

Найдите соотношение, связывающее координаты точек этой прямой.

Решение. Пусть $M(x; y)$ — точка на прямой. Проведем BK параллельно Ox , тогда $\angle MBK$ тоже будет равен α (рис. 31). Из треугольника MBK имеем:

$$\frac{MK}{BK} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ т. е.}$$

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Обозначим $\operatorname{tg} \alpha = k$. Тогда это соотношение можно переписать в виде

$$y = kx + b. \quad (10)$$

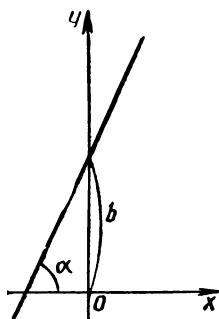


Рис. 30

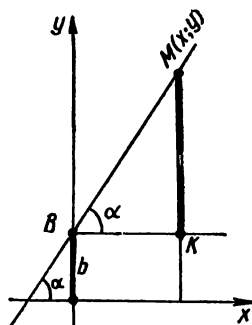


Рис. 31

Проверьте, что соотношение (10) выполняется и для точек прямой, расположенных так же, как точки P и Q (рис. 32).

Если прямая пересекает ось Oy ниже начала координат, ее уравнение пишется точно так же, только коэффициент b будет в этом случае отрицательный.

Ответ. Координаты точек прямой, пересекающей ось Oy в точке $(0; b)$ и наклоненной к оси Ox под углом α , удовлетворяют уравнению

$$y = kx + b, \text{ где } k = \operatorname{tg} \alpha;$$

k называется *угловым коэффициентом* прямой.

Такое уравнение мы смогли получить только в случае, когда прямая наклонена под острым углом к положительной полуоси Ox . Если этот угол тупой (рис. 33), то для

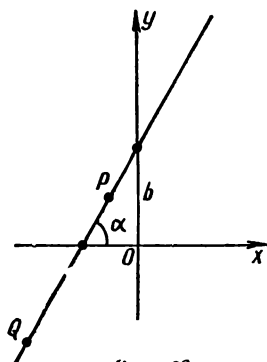


Рис. 32

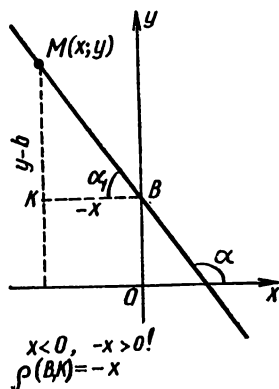


Рис. 33

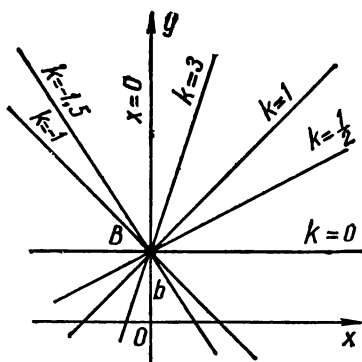


Рис. 34

любой точки $M(x; y)$ прямой будет выполняться соотношение

$$\frac{y-b}{-x} = \operatorname{tg} \alpha_1 \text{ или}$$

$$y = -k_1 x + b,$$

где k_1 — тангенс α_1 — острого угла, смежного с углом между прямой и положительным направлением оси Ox .

Когда (в IX классе) вы узнаете, что у тупых углов тоже есть тангенс, то можно будет записать эти два вида

уравнений по единому правилу (так же как наличие отрицательных чисел дает нам возможность записать это уравнение единым образом независимо от расположения прямой относительно начала координат, т. е. от знака b): $y = kx + b$, где k — тангенс угла между прямой и осью Ox , причем $k > 0$, если этот угол острый, и $k < 0$, если он тупой. Это позволяет прямой вращаться как угодно на плоскости вокруг точки B : будет только меняться значение k (рис. 34). Единственно, что запрещается, — это случай, когда прямая направлена вертикально. Тогда соотношение между координатами прямой вообще нельзя записать в виде $y = kx + b$, для точек этой прямой x всегда один и тот же, а y — любой. Значит, уравнением этой прямой является равенство $x = 0$.

Упражнения

57. Напишите уравнения четырех прямых, изображенных на рисунке 35.

58. Напишите соотношение, которому удовлетворяют точки фигуры, показанной на рисунке 36.

В упражнении 52 на стр. 199 мы получили уравнение прямой, отсекающей на осях координат единичные отрезки: $x + y = 1$.

Как изменится это уравнение, если прямая будет отсекать на осях не единичные, а какие-то произвольные отрезки a и b (рис. 37)?

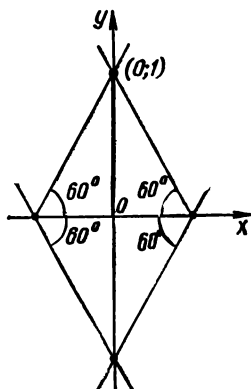


Рис. 35

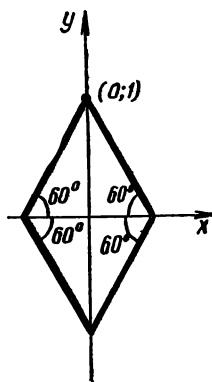


Рис. 36

Возьмем точку M на этой прямой и посмотрим, какому соотношению будут удовлетворять ее координаты x и y . Из подобия треугольников MM_2B и AOB следует:

$$\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b},$$

откуда

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (11)$$

где a и b — отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.

Зада н и е. Проверьте, что это соотношение удовлетворяется и для точек прямой, не лежащих в первой четверти.

Мы рассматривали случай, когда прямая пересекает положительную полуось Ox и положительную полуось Oy . Однако оказывается, что полученное нами уравнение может быть использовано и в других случаях (рис. 38 и рис. 39); только если прямая пересекает, например, Oy в отрицательной части, то соответствующий параметр (параметр b) будет отрицательным.

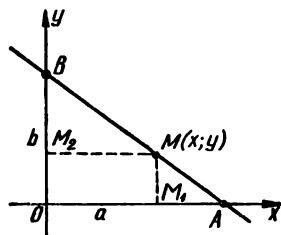


Рис. 37

Упражнение

59. Покажите, что точки прямых, изображенных на рисунках 38 и 39, удовлетворяют соотношениям, полученным из (11) подстановкой соответствующих значений a и b .

Вывод. Если прямая AB пересекает ось Ox в точке $A(a; 0)$, а ось Oy в точке $B(0; b)$, то координаты точек этой прямой удовлетворяют соотношению (11).

Это соотношение называется *уравнением прямой в отрезках*. Параметры a и b могут быть здесь как положительными, так и отрицательными.

Упражнение

60. Напишите уравнения прямых, изображенных на рисунке 35, используя уравнение прямой в отрезках.

Задача. Какому условию удовлетворяют точки прямой, проходящей через точку $(2; 5)$?

Решение. Всякую прямую (кроме вертикальной) можно задать уравнением вида

$$y = kx + b.$$

Так как требуется, чтобы прямая проходила через точку $(2; 5)$, то должно выполняться равенство:

$$5 = k \cdot 2 + b.$$

Вычтем это тождество из предыдущего уравнения; получим:

$$y - 5 = k(x - 2). \quad (12)$$

Это уравнение при любом k дает некоторую прямую, проходящую через точку $(2; 5)$, так как если подставить вместо x и y числа 2 и 5, то слева и справа получится ноль. Коэффициент же k определить нельзя, потому что в условии не указано направление, в котором идет прямая.

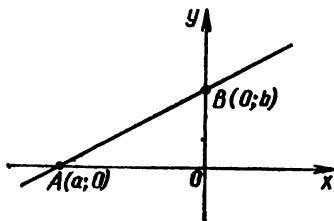


Рис. 38

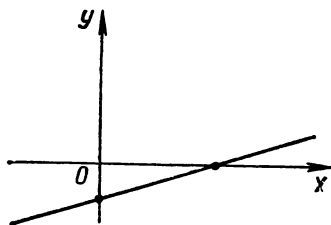


Рис. 39

Таким образом, уравнение (12) выражает все множество прямых, проходящих через точку $(2; 5)$ за одним исключением: вертикальная прямая не может быть записана в виде (10), так как ни при каком k она не получится из уравнения (10). Но ее уравнение, конечно, легко получить непосредственно: это будет $x = 2$.

Итак, любая прямая, проходящая через точку $(2; 5)$, записывается либо уравнением вида $y - 5 = k(x - 2)$, либо уравнением $x = 2$.

Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Решение. Как всякая, проходящая через точку $A(x_1; y_1)$, искомая прямая задается уравнением вида

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (13)$$

Здесь нам пока неизвестен коэффициент k . Но по условию прямая проходит и через точку $B(x_2; y_2)$, значит, выполняется равенство

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

откуда мы и найдем коэффициент k :

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Теперь остается подставить значение k в уравнение (13):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Обычно это уравнение переписывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (14)$$

Итак, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, пишется по правилу (14).

Упражнения

61. Используем полученное нами правило, чтобы получить другим способом уравнение прямой в отрезках. Пусть прямая пересекает оси координат в точках $A(a; 0)$ и $B(0; b)$. Напишем уравнение прямой по только что полученному правилу:

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0},$$

откуда $\frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b}$, или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

62. Напишите уравнения сторон и диагоналей прямоугольника, если его вершины — это точки $A(-3; 1)$, $B(-3; 6)$, $C(5; 1)$ и $D(5; 6)$.

5. Решение задач. Переводя геометрические понятия на язык координат, мы получаем возможность вместо геометрических задач рассматривать алгебраические. Оказывается, что после такого перевода большинство задач, связанных с прямыми и окружностями, приводит к уравнениям первой и второй степени, а для решения таких уравнений есть простые общие формулы. Надо заметить, что к XVII веку, когда был изобретен метод координат, искусство решения алгебраических уравнений достигло высокого уровня. К этому времени, например, математики научились решать любые уравнения третьей и четвертой степени. Поэтому французский ученый Р. Декарт, открыв метод координат, сказал: «Я решил все задачи», имея в виду геометрические задачи своего времени.

Проиллюстрируем простым примером сведение геометрических задач к алгебраическим.

Задача. Дан треугольник ABC ; найти центр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Примем точку A за начало координат, ось абсцисс направим от A к B . Тогда точка B будет иметь координаты $(c; 0)$, где c — длина отрезка AB .

Пусть точка C имеет координаты $(q; h)$, а центр искомой окружности — координаты a, b . Радиус этой окружности обозначим через R . Запишем в координатах, что точки $A(0; 0)$, $B(c; 0)$ и $C(q; h)$ лежат на искомой окружности:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= R^2, \\(c - a)^2 + b^2 &= R^2, \\(q - a)^2 + (h - b)^2 &= R^2.\end{aligned}$$

Каждое из этих условий выражает тот факт, что расстояние точек $A(0; 0)$, $B(c; 0)$ и $C(q; h)$ от центра окружности $(a; b)$ равно радиусу. Эти условия легко получить, если записать уравнение искомой окружности (окружности с центром в $(a; b)$ и радиусом R), т. е.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

а затем в это уравнение вместо x и y подставить координаты точек A, B и C , лежащих на этой окружности.

Эта система трех уравнений с тремя неизвестными легко решается, и мы получаем:

$$a = \frac{c}{2}, \quad b = \frac{q^2 + h^2 - cq}{2h},$$

$$R = \frac{\sqrt{(q^2 + h^2)((q - c)^2 + h^2)}}{2h}.$$

Задача решена, так как мы нашли координаты центра¹.

Отметим, что заодно мы получили формулу для вычисления радиуса окружности, описанной около треугольника. Эту формулу можно упростить, заметив, что

$$\sqrt{q^2 + h^2} = \rho(A, C), \quad \sqrt{(q - c)^2 + h^2} = \rho(B, C),$$

а число h равно высоте треугольника ABC , опущенной из вершины C . Если обозначить длины сторон BC и AC треугольника соответственно через a и b , то формула для радиуса примет красивый и удобный вид:

$$R = \frac{ab}{2h}.$$

Заметим, что $hc = 2S$, где S — площадь треугольника ABC , и тогда перепишем нашу формулу в виде:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Сейчас мы хотим показать вам задачу, которая интересна тем, что геометрическое решение ее довольно сложно; если же перевести ее на язык координат, решение становится совсем простым.

Задача. На плоскости даны точки A и B ; найти геометрическое место точек M , удаленных от A вдвое больше, чем от B .

Решение. Выберем систему координат на плоскости так, чтобы начало координат попало в точку A , а положительная полуось абсцисс пошла по AB . За единицу масштаба возьмем отрезок AB . Тогда точка A будет иметь координаты $(0; 0)$, точка B — координаты $(1; 0)$. Координаты точки M обозначим через $(x; y)$. Условие $\rho(A, M) = 2\rho(B, M)$ записывается в координатах так:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

¹ Заметьте, что при решении этой задачи мы не прибегали к чертежу.

Мы получили уравнение искомого геометрического места точек. Чтобы понять, какое множество описывается этим уравнением, мы преобразуем его так, чтобы оно приняло знакомый вам вид. Возведя обе части в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем равенство

$$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0.$$

Это равенство можно переписать так:

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = \frac{4}{9},$$

или так:

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Вы уже знаете, что это уравнение является уравнением окружности с центром в точке $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ и радиусом, равным $\frac{2}{3}$. Это значит, что наше геометрическое место точек является окружностью.

Для нашего решения несущественно, что $\rho(A, M)$ именно в два раза больше $\rho(B, M)$, поэтому на самом деле решена более общая задача. Именно доказано, что *геометрическое место точек, отношение расстояний которых до данных точек A и B постоянно:*

$$\frac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)} = k \quad (15)$$

(k — заданное положительное число, не равное 1), является окружностью¹.

Чтобы убедиться в силе метода координат, попробуйте решить эту же задачу геометрически.

У к а з а н и е. Проведите из точки M биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника AMB . Пусть K и L — точки пересечения этих биссектрис с прямой AB . Докажите, что положение этих точек не зависит от выбора точки на искомом геометрическом месте точек. Докажите, что угол KML равен 90° .

Надо заметить, что с такими задачами умели справляться еще древние греки. Геометрическое решение этой

¹ Мы исключили случай $k=1$; вы, конечно, знаете, что в этом случае геометрическое место (15) является прямой (точка M равноудалена от A и B). Докажите это аналитически.

задачи помещено в трактате «О кругах» древнегреческого математика Аполлония (II век до н. э.).

Решите самостоятельно такую задачу.

Найти геометрическое место точек M , разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна данной величине c . При каких c задача имеет решение?

6. Другие системы координат.

Наряду с декартовой прямоугольной системой координат употребляются и другие системы координат на плоскости. На рисунке 40 изображена декартова косоугольная система координат. Как определяются координаты точки в такой системе, ясно из чертежа.

В некоторых случаях оказывается необходимым брать по осям координат разные единицы масштаба.

Есть координаты, более существенным образом отличающиеся от декартовых. Примером таких координат являются полярные координаты, о которых мы уже упоминали.

Полярные координаты точки на плоскости определяются следующим образом.

На плоскости берется числовая ось (рис. 41). Начало координат этой оси (точка O) называется *полюсом*, а сама ось — *полярной осью*. Для определения положения точки M достаточно указать два числа: ρ — *полярный радиус* (расстояние этой точки от полюса) и φ — *полярный угол*¹

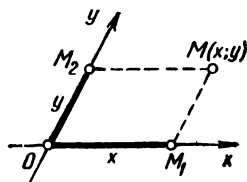


Рис. 40

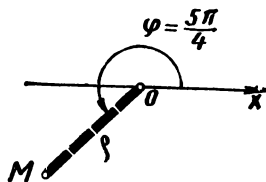


Рис. 41

¹ φ — это греческая буква, читается «фи».

Для измерения углов φ в полярной системе координат мы наряду с градусной мерой будем применять *радианную*. За 1 радиан принимается центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна R — радиусу окружности. Если $R=1$, то полный угол 360° получает радианную меру 2π , угол в 180° — меру π , прямой угол — меру $\frac{\pi}{2}$, угол в 45° — меру $\frac{\pi}{4}$ и т. д. Радиан равен $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$. Во многих вопросах радианная мера значительно удобнее градусной.

$$\rho = \text{const}$$

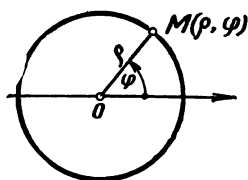


Рис. 42

(угол от полярной оси до луча OM). На нашем рисунке полярный радиус $\rho = 4$, а полярный угол φ равен 225° , или $\frac{5\pi}{4}$.

Итак, в полярной системе координат положение точки на плоскости задается двумя числами, указывающими направление, в котором находится точка, и расстояние до этой точки. Такой способ указания места очень прост и часто употребляется. Например,

чтобы объяснить дорогу заблудившемуся в лесу человеку, ему говорят: «От горелой сосны (полюс) сверните на восток (направление), пройдете километра два (расстояние), и будет сторожка (точка)».

Кто занимался в туристских секциях, легко поймет, что хождение по азимуту основано на том же принципе, что и полярные координаты.

С помощью полярных координат можно тоже задавать на плоскости различные множества точек. Очень простым, например, будет уравнение окружности с центром в полюсе (рис. 42). Если радиус окружности равен R , то и полярный радиус любой точки окружности (и только точек на рассматриваемой окружности) тоже равен R , значит, уравнение этой окружности имеет вид

$$\rho = R,$$

где R — некоторая постоянная величина.

Какое множество получится, если рассмотреть уравнение $\varphi = \alpha$, где α — некоторое постоянное число (например, $\frac{1}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$)?

Ответ ясен: точки, для которых φ постоянно и равно α , заполняют луч, выходящий из полюса под углом α к полярной оси (рис. 43). Например, если α равно $\frac{1}{2}$, то этот луч проходит под углом, равным примерно 29° к оси, а если $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, то луч направлен вертикально

вниз, т. е. угол между положительным направлением оси и лучом равен 270° ¹.

Разберем еще два примера. Уравнение $\rho = \varphi$ изображает некоторую спираль (рис. 44). В самом деле, при $\varphi = 0$ имеем $\rho = 0$ (полюс), а с ростом φ величина ρ тоже растет, так что точка, поворачиваясь вокруг полюса (против часовой стрелки), в то же время удаляется от него.

Другую спираль изображает уравнение

$$\rho = \frac{1}{\varphi}$$

(рис. 45). Здесь при φ , близком к 0, величина ρ велика, а при возрастании φ величина ρ убывает и мала при больших φ . Поэтому спираль при неограниченном возрастании φ «навертывается» на точку O .

Уравнения кривых в полярной системе вам пока труднее понять главным образом потому, что вы не изучали тригонометрии. Если же вы с ней немного знакомы, попробуйте понять, какие множества задают такие соотношения:

$$\rho = \sin \varphi; \quad \rho (\cos \varphi + \sin \varphi) + 1 = 0.$$

Полярная система координат в некоторых случаях удобнее декартовой. Вот так, например, выглядит для полярных координат уравнение кардиоиды (стр. 198):

$$\rho = 1 - \sin \varphi.$$

Если вы знаете немного тригонометрию, то по этому урав-

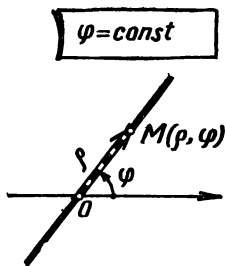


Рис. 43

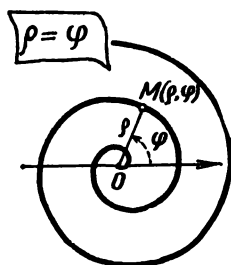


Рис. 44

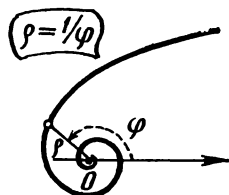


Рис. 45

¹ Напоминаем, что число, служащее координатой φ , нужно истолковывать как радианную меру угла (см. сноску на стр. 209). Угол в $\frac{1}{2}$ радиана равен примерно 29° , угол в $\frac{3\pi}{2}$ радиана равен точно 270° .

нению вы гораздо легче представите себе кривую, чем по ее уравнению в декартовых координатах.

Те красивые цветы, которые изображены на рисунке 24, задаются простыми уравнениями:

$$\rho = \sin 5\varphi \quad (\text{рис. 24, а}).$$

$$(\rho - 2)(\rho - 2 - |\cos 3\varphi|) = 0 \quad (\text{рис. 24, б}).$$

Мы ничего не говорили о взаимной однозначности соответствия между точками плоскости и полярными координатами. Это объясняется тем, что такой взаимной однозначности просто нет. В самом деле, если вы прибавите к углу φ любое целое кратное 2π (т. е. целое кратное 360°), то направление луча, очевидно, не изменится. Иными словами, точки с полярными координатами ρ , φ и ρ , $\varphi + 2k\pi$, где $\rho > 0$ и k — любое целое число, совпадают (рис. 46).

Мы хотим привести еще один пример, где тоже нет однозначности соответствия.

Во вступлении мы говорили о том, что можно определять координаты на линиях, и в § 1 рассмотрели координаты на самой простой линии — прямой. Сейчас мы покажем, как можно придумать координаты еще для одной линии — окружности. Для этого, как и в § 1, выберем на окружности некоторую точку — начало координат (точка O на рисунке 47). Положительным направлением движения по окружности будем считать, как обычно, вращение против часовой стрелки. Единицу масштаба на окружности тоже можно выбрать естественным образом: выберем за единицу радиус этой окружности. Тогда координатой точки M на окружности будет длина дуги OM , взятая со знаком плюс, если вращение от O к M идет в положительном направлении, и со знаком минус — в противном случае.

Сразу же бросается в глаза важное отличие этих координат от коор-

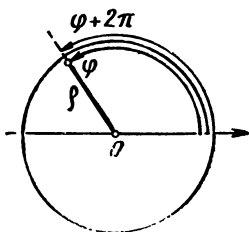


Рис. 46

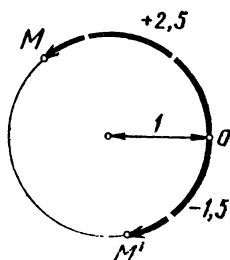


Рис. 47

динат точек на прямой: здесь нет взаимной однозначности соответствия между числами (координатами) и точками. Ясно, что каждому числу соответствует одна определенная точка окружности. Однако пусть задано число a ; чтобы найти соответствующую ему точку на окружности (т. е. точку с координатой a), нужно отложить по окружности дугу длиной в a радиусов в положительном направлении, если число a положительное, и в отрицательном направлении, если a отрицательное. При этом, например, точка с координатой 2π совпадает с началом координат. Таким образом, в другую сторону соответствие не является однозначным, т. е. одной и той же точке соответствует несколько разных чисел. Легко видеть, что каждой точке окружности соответствует бесконечное множество чисел¹.

§ 3. Координаты точки в пространстве

1. Координатные оси и плоскости. Для определения положения точки в пространстве нужно взять уже не две числовые оси (как в случае плоскости), а три: ось Ox —ось абсцисс, ось Oy —ось ординат, ось Oz —ось аппликат. Эти оси проводят через одну и ту же точку—начало координат O —так, чтобы каждые две из них были взаимно перпендикулярны. Направления осей выбирают обычно так, чтобы положительная полуось Ox совмещалась с положительной полуосью Oy вращением на 90° против часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oz (рис. 48).

В пространстве, кроме координатных осей, удобно рассматривать еще координатные плоскости, т. е. плоскости, проходящие через две какие-либо координатные оси. Таких плоскостей три (рис. 49): 1) плоскость xy (проходящая через оси Ox и Oy), 2) плоскость xz (проходящая через оси Ox и Oz), 3) плос-

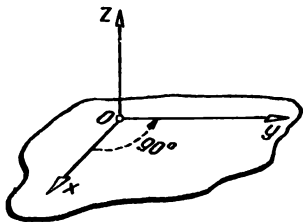


Рис. 48

¹ Вы можете заметить, что введенные координаты точки на окружности совпадают с углами φ полярной системы координат, если последние мерить в радианах. Поэтому здесь еще раз иллюстрируется неоднозначность полярных координат.

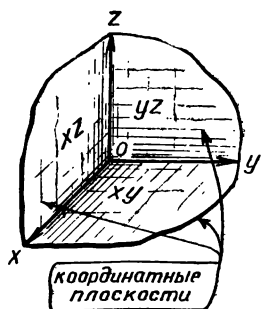


Рис. 49

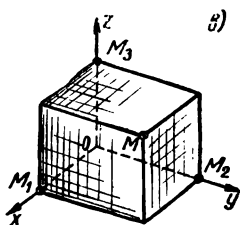
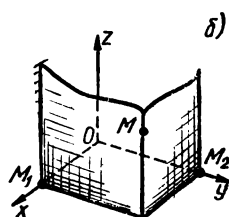
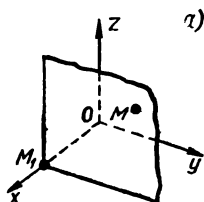


Рис. 50

кость yz (проходящая через оси Oy и Oz).

Теперь для каждой точки M пространства можно найти три числа x , y и z , которые будут служить ее координатами.

Чтобы найти первое число x , проведем через точку M плоскость, параллельную координатной плоскости yz (проведенная плоскость будет одновременно перпендикулярна к оси Ox). Точка пересечения этой плоскости с осью Ox (точка M_1 на рис. 50, а) имеет на этой оси координату x . Это число x — координата точки M_1 на оси x — называется *абсциссой* точки M .

Чтобы найти вторую координату, через точку M проводят плоскость, параллельную плоскости xz (перпендикулярную к оси Oy), находят на оси Oy точку M_2 (рис. 50, б). Число y — координата точки M_2 на оси Oy — называется *ординатой* точки M .

Аналогично, проведя через точку M плоскость, параллельную плоскости xy (перпендикулярную к оси Oz), находят число z — координату точки M_3 (рис. 50, в) на оси Oz . Это число z называется *аппликатой* точки M .

Таким образом, мы каждой точке пространства поставили в соответствие определенную тройку чисел — ее координаты: абсциссу, ординату и аппликату.

Обратно, каждой тройке чисел $(x; y; z)$, заданных в определенном порядке (сначала x , затем y , потом z), можно поставить в соответствие определенную точку M пространства. Для этого надо вос-

пользоваться описанным построением, проделав его с конца: отметить на осях точки M_1 , M_2 и M_3 , имеющие на этих осях соответственно координаты x , y и z , а затем провести через эти точки плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точка пересечения этих трех плоскостей и будет искомой точкой M . Очевидно, что числа $(x; y; z)$ будут служить ее координатами.

Итак, нами установлено взаимно-однозначное соответствие¹ между точками пространства и упорядоченными тройками чисел (координат этих точек).

Освоиться с координатами в пространстве вам будет труднее, чем с координатами на плоскости: для изучения координат в пространстве нужно немного знать геометрию в пространстве — стереометрию. Необходимые для понимания координат в пространстве сведения, которые вы легко поймете в силу их простоты и наглядности, получают в курсе стереометрии несколько более строгое обоснование.

В этом курсе можно будет доказать, что точки M_1 , M_2 и M_3 , построенные как точки пересечения осей координат с плоскостями, проведенными через точку M параллельно плоскостям координат, являются проекциями точки M на оси координат, т. е. служат основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на оси координат. Так что для координат в пространстве можно дать определение, аналогичное определению координат точки на плоскости, а именно:

Координатами точки M в пространстве называются координаты проекций этой точки на координатные оси на этих осях.

Можно показать, что многие формулы, выведенные для плоскости, нужно только немного видоизменить для случая пространства. Так, например, расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(Вывод этой формулы очень похож на вывод аналогичной формулы для плоскости. Попробуйте сделать его самостоятельно.)

¹ Определение взаимно-однозначного соответствия см. на стр. 176.

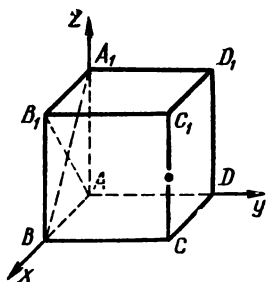


Рис. 51

В частности, расстояние точки $A(x; y; z)$ от начала координат выражается формулой:

$$\rho(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Упражнения

63. Возьмем восемь точек: $(1; 1; 1)$, $(1; 1; -1)$, $(1; -1; 1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; 1; 1)$, $(-1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$, $(-1; -1; -1)$. Какая из точек наиболее удалена от точки $(1; 1; 1)$? Най-

дите расстояние от этой точки до $(1; 1; 1)$. Какие точки лежат ближе всего к точке $(1; 1; 1)$? Каково расстояние от этих точек до $(1; 1; 1)$?

64. Нарисуйте куб. Оси координат направьте по трем ребрам, выходящим из одной какой-либо вершины. За единицу масштаба возьмите ребро куба. Обозначьте вершины куба буквами $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$, как на рисунке 51.

а) Найдите координаты всех вершин куба.

б) Найдите координаты середины ребра CC_1 .

в) Найдите координаты точки пересечения диагоналей грани AA_1B_1B .

65. Чему равно расстояние от вершины $(0; 0; 0)$ куба задачи 64 до точки пересечения диагоналей грани BB_1C_1C ?

66. Какие из перечисленных точек $A(1; 0; 5)$, $B(3; 0; 1)$,

$C(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{2}{5})$, $D(\frac{7}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$, $E(\frac{2}{5}; -\frac{1}{2}; 0)$, $F(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3})$

лежат внутри куба задачи 64, а какие вне его?

67. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри куба задачи 64 и на его границе.

Ответ. Координаты x, y, z точек, лежащих внутри рассматриваемого куба и на его границе, могут принимать числовые значения от нуля до единицы включительно, т. е. удовлетворяют соотношениям:

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$0 \leq z \leq 1.$$

2. Задание фигур в пространстве. Так же как на плоскости, координаты в пространстве дают нам возможность задавать с помощью чисел и числовых соотношений не только точки, но и линии, поверхности и другие множества точек. Посмотрим, например, какое множество точек получится, если задать только две координаты, а третью считать произвольной. Условия $x=a$, $y=b$, где a и b — заданные числа (например, $a=5$, $b=4$), задают в пространстве прямую, параллельную оси z (рис. 52). Все точки такой прямой имеют одну и ту же абсциссу и одну и ту же ординату. Координата z может принимать любые значения.

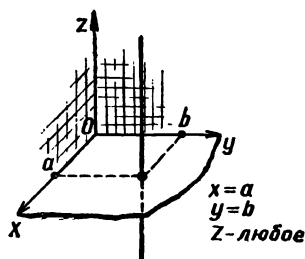


Рис. 52

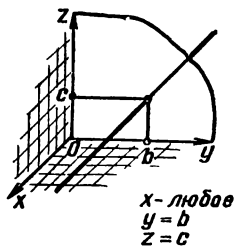


Рис. 53

Точно так же условия $y=b$, $z=c$ определяют прямую, параллельную оси x (рис. 53); условия $x=a$, $z=c$ — прямую, параллельную оси y (рис. 54).

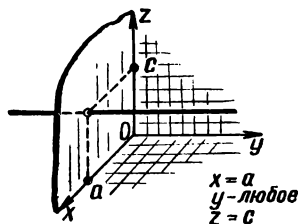


Рис. 54

Интересно, какое множество точек получится, если задать только одну координату, например $z=1$?

Ответ ясен из рисунка 55: это плоскость, параллельная координатной плоскости xy (т. е. плоскости, проходящей через ось Ox и ось Oy) и отстоящая от нее на расстоянии 1 в направлении положительной полуоси Oz .

Разберем еще несколько примеров, показывающих, как можно задавать в пространстве различные множества с по-

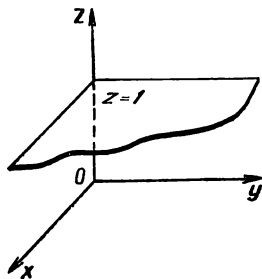


Рис. 55

мощью уравнений и других соотношений между координатами.

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (16)$$

Поскольку расстояние точки $(x; y; z)$ от начала координат задается выражением $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то ясно, что в переводе на геометрический язык соотношение (16) означает, что точка с координатами $(x; y; z)$, удовлетворяющими этому соотношению, находится на расстоянии R от начала координат. Значит, множество всех точек, для которых выполняется соотношение (16), — это поверхность шара — сфера с центром в начале координат и радиусом R .

2. Где расположены точки, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1?$$

Ответ. Так как это соотношение означает, что расстояние точки $(x; y; z)$ от начала координат меньше единицы, то искомое множество — это множество точек, лежащих внутри шара с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

3. Какое множество точек задается уравнением

$$x^2 + y^2 = 1? \quad (17)$$

Рассмотрим сначала только точки плоскости xy , удовлетворяющие этому соотношению, т. е. точки, для которых $z = 0$. Тогда это уравнение, как мы видели раньше (стр. 196), задает окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1. У каждой из этих точек координата z равна нулю, а координаты x и y удовлетворяют соотношению (17). Например, точка $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0)$ удовлетворяет этому уравнению (рис. 56). Однако, зная эту одну точку, мы можем найти сразу много других точек, удовлетворяющих тому же уравнению. Действительно, так как z в уравнение (17) не входит, то и точка $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 10)$ удовлетворяет уравнению, и точка $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; -5)$, и вообще все точки $(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; z)$, где значение координаты z совершенно произвольно. Все эти точки лежат на пря-

мой, проходящей через точку $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$ параллельно оси Oz .

Таким же образом из каждой точки $(x^*; y^*, 0)$ нашей окружности, лежащей на плоскости xy , мы можем получить много точек, удовлетворяющих уравнению (17). Для этого проведем через каждую точку окружности прямую, параллельную оси Oz . Все точки каждой прямой будут иметь x и y такие же, как и у точки окружности, а z может быть любым числом, т. е. это будут точки вида (x^*, y^*, z) . Но поскольку z в уравнение (17) не входит, а числа x^*, y^* уравнению удовлетворяют, то и числа x^*, y^*, z тоже удовлетворяют уравнению (17). Ясно, что таким образом можно получить всякую точку, удовлетворяющую уравнению (17).

Итак, множество точек, определяемое уравнением (17), получается следующим образом: берем на плоскости xy окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 1, и через каждую точку этой окружности проводим прямую, параллельную оси Oz . Мы получаем цилиндрическую поверхность (рис. 56).

4. Мы видели, что одно уравнение задает в пространстве, вообще говоря, некоторую поверхность. Но это не всегда так. Например, уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют только точки линии — оси Oz , так как из уравнения следует, что x и y равны нулю, а все точки, для которых эти координаты равны нулю, лежат на оси Oz . Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ изображает точку (начало координат), а уравнению $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ соответствует пустое множество.

5. Рассмотрим множество точек, координаты которых удовлетворяют не одному уравнению, а системе уравнений, например:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1 \end{cases}$$

Точки, удовлетворяющие первому уравнению, заполняют поверхность сферы радиуса 2 с центром в начале координат. Точки, удовлетворяющие вто-

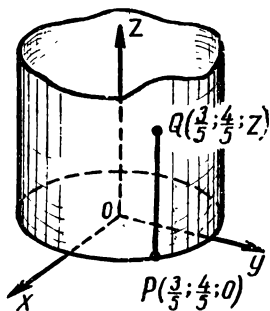


Рис. 56

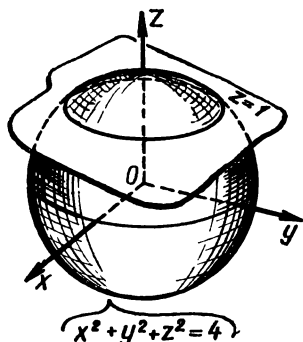


Рис. 57

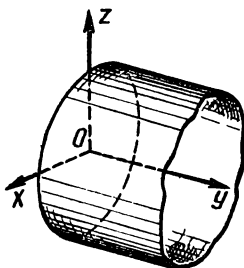


Рис. 58

рому уравнению, заполняют плоскость, параллельную плоскости xu и расположенную от нее на расстоянии 1 в положительную сторону оси Oz . Точки, удовлетворяющие и первому, и второму уравнению, должны лежать и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, и на плоскости $z = 1$, т. е. лежать на их линии пересечения. Таким образом, эта система задает окружность, являющуюся линией пересечения сферы и плоскости (рис. 57).

Мы видим, что каждое из уравнений системы задает поверхность, а оба уравнения вместе задают линию.

Вопрос. Какие из указанных ниже точек лежат на первой поверхности, какие на второй, а какие на линии их пересечения:

$A(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$, $B(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1)$,
 $C(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $D(1; \sqrt{3}; 0)$,
 $E(0; \sqrt{3}; 1)$, $F(-1; -\sqrt{2}; 1)$?

6. Как задать в пространстве окружность, расположенную в плоскости xz с центром в начале координат и радиусом 1?

Уравнение $x^2 + z^2 = 1$ определяет в пространстве, как вы уже видели, цилиндрическую поверхность. Чтобы получить только точки нужной нам окружности, к этому уравнению надо добавить условие $y = 0$, выделив тем самым из всех точек цилиндра точки, лежащие на плоскости xz (рис. 58). Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

Упражнения

68. Какие множества точек задают в пространстве соотношения:

а) $z^2 = 1$; б) $y^2 + z^2 = 1$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

69. Имеются три системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y^2 + z^2 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0; \end{cases}$

Какие из них определяют одну и ту же линию, а какие разные?

70. Как задать в пространстве биссектрису угла xOy ? Какое множество будет задавать в пространстве одно уравнение $x = y$?

ДОПОЛНЕНИЕ

1. Алгебра и геометрия. Теперь вы уже знаете кое-что о методе координат, и мы можем поговорить с вами об интересных вещах, больше связанных с современной математикой.

Алгебра и геометрия, которые сейчас большинство школьников воспринимают как совершенно разные науки, на самом деле очень близки. С помощью метода координат можно было бы изложить весь школьный курс геометрии без единого чертежа, используя только числа и алгебраические операции. Курс планиметрии начинался бы словами: «Назовем точкой пару чисел $(x; y) \dots$ » Далее можно было бы определить окружность как совокупность точек, удовлетворяющих уравнению вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Прямой линией называлась бы совокупность точек, удовлетворяющих уравнению $ax + by = c$. Многие другие фигуры можно было бы также охарактеризовать системами уравнений и неравенств. Все геометрические теоремы превратились бы при этом в некоторые алгебраические соотношения.

Установление связи между алгеброй, с одной стороны, и геометрией — с другой, было, по существу, революцией в математике. Оно восстановило математику как единую науку, в которой нет «китайской стены» между отдель-

ными ее частями. Создателем метода координат считают французского философа и математика Рене Декарта (1596 — 1650). В последней части большого философского трактата Декарта, вышедшей в 1637 г., дано описание метода координат и его применение к решению геометрических задач. Развитие идей Декарта привело к возникновению особой ветви математики, которую теперь называют аналитической геометрией.

Само это название выражает основную идею теории. Аналитическая геометрия — это та часть математики, которая решает геометрические задачи аналитическими (т. е. алгебраическими) средствами. Хотя аналитическая геометрия является сейчас уже вполне развившимся и законченным разделом математики, идеи, лежащие в ее основе, породили новые отрасли математики. Возникла и развивается алгебраическая геометрия, которая изучает свойства линий и поверхностей, заданных алгебраическими уравнениями. Эту часть математики никак нельзя считать законченной.

Как раз в последние годы в ней получены новые фундаментальные результаты, оказавшие большое влияние и на другие разделы математики.

2. Геометрия помогает считать. При решении геометрических задач на первый план выступает одна сторона метода координат — аналитическое истолкование геометрических понятий, перевод геометрических образов и соотношений на язык чисел. Однако другая сторона метода координат — геометрическая интерпретация чисел и числовых соотношений — приобрела не менее важное значение. Знаменитый математик Герман Минковский (1864 — 1909) использовал геометрический подход для решения уравнений в целых числах, и математики его времени были поражены тем, насколько простыми и ясными оказались при этом некоторые, казавшиеся раньше очень трудными вопросы теории чисел.

Разберем один совсем простой пример, показывающий, как геометрия помогает решать алгебраические задачи.

Задача. Рассмотрим неравенство

$$x^2 + y^2 \leq n,$$

где n — некоторое целое положительное число. Спрашивается: сколько решений в целых числах (N) имеет это неравенство?

Решение. Для небольших значений n на этот вопрос легко ответить. Например, при $n=0$ есть только одно решение: $x=0, y=0$. При $n=1$ к этому решению прибавляется еще четыре: $x=0, y=1$; $x=1, y=0$; $x=0, y=-1$ и $x=-1, y=0$. Значит, при $n=1$ всего будет пять решений.

При $n=2$, кроме уже перечисленных, имеется еще четыре решения: $x=1, y=1$; $x=1, y=-1$; $x=-1, y=1$; $x=-1, y=-1$.

Всего при $n=2$ имеется 9 решений. Продолжая таким образом, увидим, что число решений N растет с возрастанием n , но угадать точный закон изменения N довольно трудно. Можно предположить, что отношение $\frac{N}{n}$ с возрастанием n стремится к некоторому числу.

С помощью геометрической интерпретации мы сейчас покажем, что это действительно так и что отношение $\frac{N}{n}$ стремится к известному вам числу $\pi = 3,14159265 \dots$

Будем рассматривать пару чисел $(x; y)$ как точку на плоскости (с абсциссой x и ординатой y). Неравенство $x^2 + y^2 \leq n$ означает, что точка $(x; y)$ принадлежит кругу K_n радиуса \sqrt{n} с центром в начале координат (рис. 59, на котором $n=32$). Таким образом, наше неравенство имеет столько решений в целых числах, сколько точек с целыми координатами попадает внутрь круга K_n или на его границу.

Геометрически очевидно, что точки с целыми координатами «равномерно распределены на плоскости» и что на единицу площади приходится одна точка. Поэтому ясно, что число решений должно быть примерно равно площади круга. Таким образом, мы получаем приближенную формулу:

$$N \approx \pi n.$$

Теперь поставим аналогичную задачу для трех неизвестных: сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq n?$$

Ответ получается очень быстро, если опять использовать геометриче-

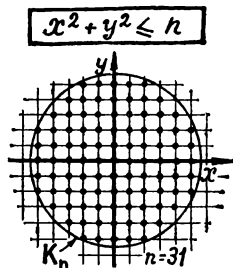


Рис. 59

скую интерпретацию. Число решений задачи приблизительно равно объему шара радиуса \sqrt{n} , т. е. $\frac{4}{3} \pi n \sqrt{n}$. Получить такой результат чисто алгебраически было бы трудно.

3. Нужно вводить четырехмерное пространство. Но как быть, если нам требуется найти число целочисленных решений неравенства

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n,$$

в котором четыре неизвестных? При решении этой задачи для двух и трех неизвестных мы использовали геометрическую интерпретацию. Решение неравенства с двумя неизвестными, т. е. пару чисел, мы рассматривали как точку на плоскости; решение неравенства с тремя неизвестными, т. е. тройку чисел, — как точку в пространстве. Нельзя ли и дальше использовать этот прием? Тогда четверку чисел $(x; y; z; t)$ нужно считать точкой некоторого пространства, которое имеет четыре измерения (четыrehмерного пространства). Неравенство $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n$ можно тогда рассматривать как условие того, что точка $(x; y; z; t)$ лежит внутри четырехмерного шара радиуса \sqrt{n} с центром в начале координат. Далее нужно будет разбить четырехмерное пространство на четырехмерные кубики. Наконец, нам понадобится вычисление объема четырехмерного шара¹. Иными словами, мы должны начать развивать геометрию четырехмерного пространства.

Не будем делать всего этого в данном сборнике. Мы сможем лишь немножко приоткрыть дверь в четырехмерное пространство и познакомить вас с некоторыми его особенностями.

Вас, наверное, интересуют вопросы: насколько серьезно можно говорить об этом воображаемом четырехмерном пространстве, насколько можно строить геометрию этого пространства по аналогии с обычной геометрией, в чем будет сходство и в чем различие между трехмерной и

¹ Объем четырехмерного шара равен $\frac{\pi^2 R^4}{2}$. Для сравнения укажем еще, что объем пятимерного шара равен $\frac{8\pi^2 R^5}{15}$, шестимерного $\frac{\pi^3 R^6}{6}$, семимерного $\frac{16\pi^3 R^7}{105}$.

четырёхмерной геометрией? Изучая эти вопросы, математики получили такой ответ.

Да, такую геометрию развивать можно, она во многом похожа на обычную. Более того, она содержит в себе обычную геометрию как составную часть, подобно тому как стереометрия (геометрия в пространстве) содержит в себе планиметрию. Но, конечно, геометрия четырёхмерного пространства будет иметь и очень существенные отличия от обычной геометрии. Очень интересно об этих особенностях четырёхмерного мира рассказал писатель-фантаст Герберт Уэллс в одном из своих рассказов.

Но мы покажем сейчас, что эти особенности, по существу, очень похожи на те особенности, которыми отличается геометрия трёхмерного пространства от геометрии двумерной плоскости.

4. Особенности четырёхмерного пространства. Нарисуйте на плоскости круг и представьте себя в виде воображаемого существа двумерного мира, которое может двигаться по плоскости, но не имеет права выходить в пространство. (Вы даже не знаете, что пространство существует, и не можете его вообразить.) Тогда граница круга — окружность — будет для вас непреодолимой преградой: вы не сможете выйти из круга, ибо окружность будет всюду преграждать вам путь.

Теперь представьте, что эта плоскость с нарисованным кругом помещена в трёхмерное пространство и что вы догадались о существовании третьего измерения. Теперь вы, конечно, без труда выйдете за пределы круга, например просто перешагнете через окружность.

Пусть теперь вы — существо трёхмерного мира. Пусть вы находитесь внутри шара, граница которого (сфера) для вас непроходима. Тогда вы не сможете выйти за пределы этого шара. Но если шар помещен в четырёхмерное пространство и вы догадались о существовании четвертого измерения, то без всяких усилий сможете выйти за пределы шара.

Ничего особенно мистического в этом нет — просто граница трёхмерного шара (сфера) не разбивает четырёхмерного пространства на две части, хотя трёхмерное пространство она разбивает. Это вполне аналогично тому, что граница круга (окружность) не разбивает трёхмерного пространства на две части, хотя плоскость (в которой она лежит) эта окружность разбивает.

Еще один пример: ясно, что две симметричные друг другу фигуры на плоскости нельзя совместить, если их разрешается лишь перемещать, не выводя из плоскости. Однако сидящая бабочка может сложить крылья, выводя их из горизонтальной плоскости в вертикальную. Так же и в пространстве трех измерений нельзя совместить симметричные пространственные фигуры. Например, как ни верти, левую перчатку нельзя превратить в правую, хотя они являются равными геометрическими фигурами. А в пространстве четырех измерений трехмерные симметричные фигуры можно совместить.

Поэтому нет ничего удивительного в том, что герой выше упомянутого рассказа Уэллса после своего путешествия в четырехмерное пространство оказался перевернутым, симметричным самому себе: сердце у него, например, оказалось справа. Это произошло потому, что, выйдя в четырехмерное пространство, он вывернулся в нем на другую сторону (подобно тому, как левая перчатка, вывертываясь наизнанку, превращается в правую).

5. Немного физики. Четырехмерная геометрия оказалась чрезвычайно полезным и просто незаменимым аппаратом для современной физики. Без аппарата многомерной воображаемой геометрии было бы очень трудно изложить и использовать такой важный раздел современной физики, как теория относительности Эйнштейна.

Любой математик может позавидовать Минковскому, который, после того как он очень удачно использовал геометрию в теории чисел, сумел еще раз с помощью наглядных геометрических соображений внести ясность в трудные математические вопросы — на этот раз касающиеся теории относительности. В основе теории относительности лежит идея о неразрывной связи пространства и времени. Поэтому естественно считать момент времени, в который происходит какое-либо событие, четвертой координатой этого события наряду с первыми тремя определяющими точку пространства, в которой происходит это событие.

Получаемое так четырехмерное пространство называется пространством Минковского. Открытие Минковского состоит в том, что основные формулы теории относительности — формулы Лоренца, записанные на языке координат для этого специального четырехмерного пространства, являются чрезвычайно простыми.

И. М. Гельфанд,

Е. Г. Глаголева,

Э. Э. Шноль

Научиться строить графики по книге нелегко: читателю не хватает доски, на которой во время урока или лекции преподаватель постепенно строит график. Поэтому в этой статье нет чертежей, на которых дается обычно только окончательный вид графика: художники превратили рисунки в некоторое подобие доски. Следя за рисунками, вам нетрудно будет воспроизвести шаг за шагом весь процесс построения графика.

Часть теоретического материала изложена в виде задач. Для понимания текста необходимо внимательно разбирать все задачи и примеры, помещенные в тексте.

Введение

На рисунке 1 вы видите две кривые, начерченные сейсмографом — прибором, записывающим колебания земной коры. Первая кривая получена, когда земная кора спокойна, на второй видны сигналы землетрясения.

На рисунке 2 — кардиограммы. Первая показывает нормальную работу сердца, вторая снята у больного.

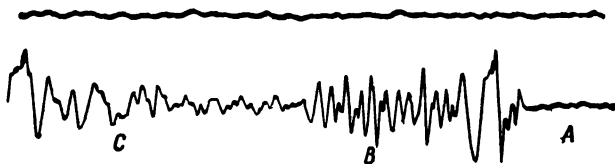


Рис. 1



Рис. 2

А здесь показана так называемая характеристика полупроводникового элемента — кривая зависимости силы тока от напряжения (рис. 3).

Сейсмолог, анализируя сейсмограмму, узнает, когда было землетрясение, где оно произошло, определяет силу и характер толчков. Врач, исследующий больного, может по кардиограмме судить о нарушениях сердечной деятельности; изучение кардиограммы помогает правильно поставить диагноз заболевания. Инженер-радиоэлектроник по характеристике полупроводникового элемента выбирает наиболее подходящий режим его работы.

Все эти люди изучают некоторые функции по графикам этих функций.

Что же такое функция и что же такое график функции?

Прежде чем дать точное определение функции, поговорим немного об этом понятии. Описательно говоря, функция — это когда каждому значению некоторой величины, которую математики называют *аргументом* и обозначают обычно буквой x , отвечает значение другой величины y , называемой *функцией*.

Так, например, величина смещения земной поверхности при землетрясении в каждый момент времени имеет определенное значение — величина смещения есть функция времени. Сила тока в полупроводниковом элементе есть функция напряжения, так как каждому значению напряжения соответствует определенное значение силы тока.

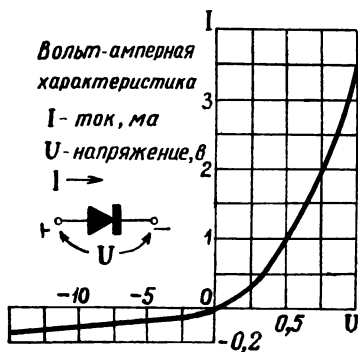


Рис. 3

Таких примеров можно привести очень много: объем шара есть функция его радиуса, высота, на которую поднимается брошенный вертикально вверх камень, есть функция его начальной скорости и т. д.

Перейдем теперь к точным определениям. Когда говорят, что величина y есть функция величины x , то прежде всего указывают, какие значения может принимать x . Эти «разрешенные» значения аргумента x называются *допустимыми значениями*, а множество всех допустимых значений величины x называется *областью определения функции* y .

Например, если мы говорим, что объем шара V есть функция его радиуса R , то областью определения функции $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ будут все числа, большие нуля, поскольку величина радиуса шара R может быть только положительным числом.

Всегда, когда задается функция, необходимо указывать ее область определения.

Определение 1. Мы говорим, что y есть функция величины x , если 1) указано, какие значения x являются допустимыми, т. е. задана область определения функции, и если 2) каждому допустимому значению x соответствует в точности одно значение величины y .

Коротко вместо слов «величина y есть функция величины x » записывают:

$$y = f(x)$$

(читается: «игрек равно эф от икс»).

Запись $f(a)$ означает численное значение функции $f(x)$, соответствующее значению x , равному a . Например, если

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 1}, \\ \text{то} \quad f(2) &= \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5}, \\ f(1) &= \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}, \\ f(0) &= \frac{1}{0^2 + 1} = 1 \end{aligned}$$

и т. д.

Правило, с помощью которого по значению x находится соответствующее значение y , может задаваться раз-

личными способами, и никаких ограничений на форму, в которой оно выражается, не накладывается. Если вам сказано, что y есть функция от x , то вы должны проверить только, что: 1) вам задана область определения, т. е. указано, какие значения может принимать x , и 2) дано правило, по которому каждому допустимому значению x вы можете поставить в соответствие единственное значение y .

Каким может быть это правило?

Приведем несколько примеров.

1. Пусть сказано, что x — это любое действительное число и y находится по формуле

$$y = x^2.$$

Функция $y = x^2$ задана формулой.

Правило может быть и словесным.

2. Функция y задается следующим образом: если x — положительное число, то y равно 1, если x — отрицательное число, то y равно -1 , если x равно нулю, то y равно 0.

Приведем еще один пример функции, задаваемой словесным правилом.

3. Каждое число x можно записать в виде

$$x = y + \alpha,$$

где α — неотрицательное число, меньшее единицы, а y — целое число. Ясно, что каждому числу x соответствует единственное число y , т. е. y есть функция от x . Область определения этой функции — вся числовая ось. Эта функция называется «целая часть x » и обозначается так:

$$y = [x].$$

Например,

$$\begin{aligned} [3,53] &= 3, & [4] &= 4, & [0,3] &= 0, \\ [-0,03] &= -1. \end{aligned}$$

Мы будем использовать эту функцию в наших упражнениях.

4. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную формулой

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}.$$

Что разумно считать ее областью определения?

Если функция задана формулой, то рассматривается обычно ее так называемая *естественная* область определения, т. е. множество всех чисел, для которых можно выполнить действия, указанные формулой. Значит, в область определения нашей функции не входят число 5 (так как при $x=5$ знаменатель дроби обращается в нуль) и значения x , меньшие чем -3 (так как при $x < -3$ подкоренное выражение отрицательно). Итак, естественная область определения функции $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ — это все числа, удовлетворяющие соотношениям:

$$x \geq -3, \quad x \neq 5.$$

Функцию можно изображать геометрически с помощью графика. Чтобы построить график некоторой функции, рассмотрим некоторое допустимое значение x и отвечающее ему значение y . Например, пусть значение x — это число a , а соответствующее ему значение y — число b . Эту пару чисел a и b изобразим на плоскости точкой с координатами $(a; b)$. Построим такие точки для всех допустимых значений x . Набор получившихся точек и есть график функции.

Определение II. *График функции* — это множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x , а ординаты — соответствующими значениями функции y .

Например, здесь (рис. 4) изображен график функции $y = [x]$. Он состоит из бесконечного множества горизонтальных отрезков. Стрелочки означают, что правые

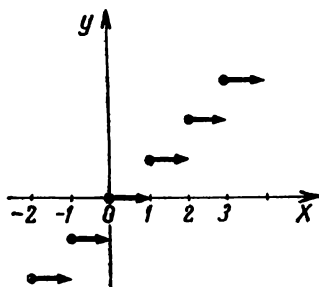


Рис. 4

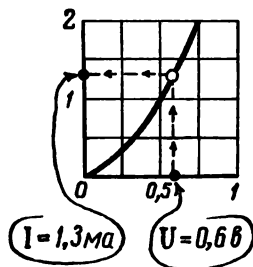


Рис. 5

Волна P (шаг 0,2 сек)	Волна S (шаг 0,4 сек)
0,1	0,2
0,1	0,5
-1,6	2,5
-1,7	4,9
-2,4	7,1
-3,0	6,1
-4,5	3,8
-3,8	0,4
-2,9	0,2
-1,1	0,7
0,8	1,5
3,3	2,5
5,1	3,2
3,7	2,8
0,0	0,4
-2,0	-2,2
-4,4	-3,3
-5,8	-4,5
-3,8	-4,8
-1,6	-4,8
	-4,8
	-3,7
	-3,5
	-4,4
	-6,6

концы этих отрезков не принадлежат графику (а левые принадлежат).

График может служить правилом, задающим функцию. Например, по характеристике полупроводникового элемента можно определить, что если аргумент U равен 0,6 (вольт), то функция I равна 1,3 (миллиампер) (рис. 5).

Изображать функции графиками очень удобно, потому что, поглядев на графики, можно сразу отличить одну функцию от другой.

Посмотрите еще раз на первый рисунок. На этом графике самый неопытный человек сразу увидит сигналы землетрясения (участки B и C). Присмотревшись, он, безусловно, заметит и разницу в характере волн на участках B и C (сейсмолог мог бы объяснить вам, что на участке B записана так называемая волна P — волна, идущая в глубине земной коры, а на участке C — волна S , идущая по поверхности).

Попробуйте, удастся ли вам отличить эти два участка по таблицам. (Мы не смогли привести таблицы для всей кривой: она заняла бы всю страницу. Здесь вы видите таблицы для небольших кусков участков B и C .)

На рисунках 6 и 7 показаны графики двух функций,

которые задаются очень похожими формулами:

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$$

и
$$y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$$

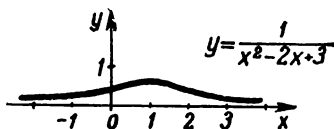


Рис. 6

Разницу в поведении этих двух функций можно, конечно, обнаружить и по формулам. Но если посмотреть на их графики, эта разница сразу бросается в глаза.

Всегда, когда нужно выяснить общий характер поведения функции, обнаружить ее особенности, график в силу своей наглядности является незаменимым. Поэтому инженер или ученый, получив интересующую его функцию в виде формулы или таблицы, обычно берется за карандаш, набрасывает эскиз графика и смотрит, как ведет себя функция, как она «выглядит».

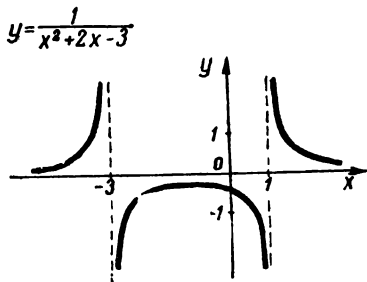


Рис. 7

§ 1. Некоторые примеры

1. Если буквально следовать определению, то для построения графика некоторой функции нужно найти все пары соответствующих значений аргумента и функции и построить все точки с этими координатами. В большинстве случаев это сделать практически невозможно, так как таких точек бесконечно много. Поэтому обычно находят несколько точек, принадлежащих графику, и соединяют их плавной кривой.

Попробуем построить таким способом график функции

$$y = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (1)$$

Выберем несколько значений аргумента, найдем соответствующие значения функции и запишем их в таблицу

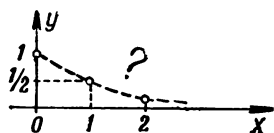


Рис. 8

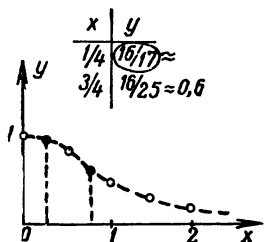
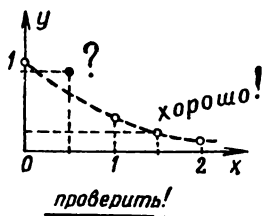


Рис. 9

не так, как мы думали. Возьмем на этом «сомнительном» участке еще значения $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$. Соединим все полученные точки, мы получим более правильную кривую (рис. 9 внизу). Взятые для контроля точки: и $(\frac{1}{3}; \frac{9}{10})$, и $(\frac{2}{3}; \frac{9}{13})$ — хорошо «ложатся» на эту кривую (рис. 10).

2. Чтобы построить левую половину графика, нужно заполнить еще одну таблицу для отрицательных значений аргумента. Это сделать просто. Например,

$$\text{при } x=2 \text{ имеем: } y = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5},$$

$$\text{при } x=-2 \text{ имеем: } y = \frac{1}{(-2)^2+1} = \frac{1}{5}.$$

x	0	1	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

По полученным координатам построим точки и соединим их пока штриховой линией (рис. 8).

Проверим теперь, правильно ли мы провели кривую между найденными точками графика. Для этого возьмем какое-нибудь промежуточное значение аргумента, например $x = 1\frac{1}{2}$, и вычислим соответствующее значение $y = \frac{4}{13}$. По-

лученная точка $(1\frac{1}{2}; \frac{4}{13})$ хорошо «ложится» на нашу кривую (рис. 9), так что мы провели ее вроде бы правильно.

Однако возьмем еще $x = \frac{1}{2}$.

Тогда $y = \frac{4}{5}$, и соответствующая точка ложится выше нарисованной нами кривой (рис. 9). Значит, между $x=0$ и $x=1$ график идет



Рис. 10

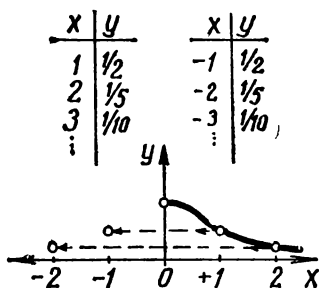


Рис. 11

Значит, вместе с точкой $(2; \frac{1}{5})$ на графике лежит точка $(-2; \frac{1}{5})$, симметричная первой относительно оси ординат.

Вообще, если точка $(a; b)$ лежит на правой половине нашего графика, то на левой его половине будет лежать точка $(-a; b)$, симметричная $(a; b)$ относительно оси Oy (рис. 11). Поэтому, чтобы получить левую часть графика функции (1), соответствующую отрицательным значениям x , нужно зеркально отразить относительно оси Oy правую половину этого графика.

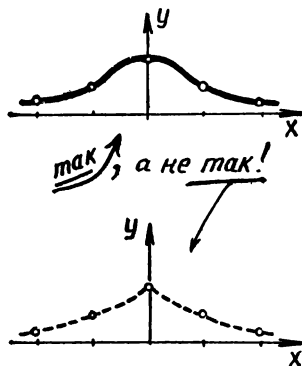


Рис. 12

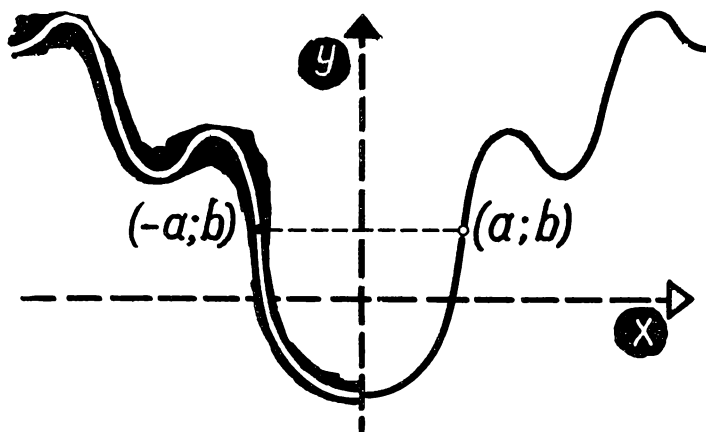
Общий вид графика — на рисунке 12.

Если бы мы поторопились и построили для отрицательных x наш первоначальный набросок (рис. 8 и 9), то на нем при $x=0$ получился бы «излом» (уголок). Этого излома нет на правильном графике: вместо него здесь плавный «купол».

Упражнения

1. График функции $y = \frac{1}{3x^2 + 1}$ (2)

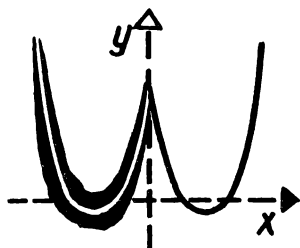
похож на график функции $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Постройте его.



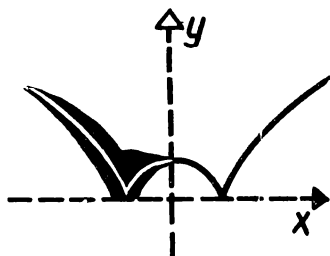
$$f(-a) =$$

$$= f(a)$$

Если значения некоторой функции, соответствующие двум любым противоположным значениям аргумента (т.е. значениям a и $-a$), равны между собой, то такая функция называется ЧЁТНОЙ. Всякая четная функция имеет график, симметричный относительно оси ординат.



$$y = x^2 - 3|x| + 2$$



$$y = \sqrt{|x^2 - 1|}$$

2. Какие из следующих функций являются четными:

а) $y = 1 - x^2$; б) $y = x^2 + x$;

в) $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$?

3. Возьмем теперь функцию

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}. \quad (3)$$

По виду эта формула мало отличается от формулы (2). Однако при построении этого графика по точкам сразу же начинаются неприятности.

Составим снова таблицу и нанесем на чертеж полученные точки. Как соединять эти точки, неясно: создается впечатление, что точка $(0; -1)$ «выпадает» (рис. 13).

Попытайтесь сами построить график этой функции. Не огорчайтесь, если для того, чтобы понять, как идет эта кривая, вам понадобится найти больше точек, чем вы ожидали.

После этого обязательно прочитайте в пунктах 5 и 6, как строится этот график и какие полезные выводы делаются из построения.

4. График многочлена

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \quad (4)$$

мы тоже начнем строить по точкам.

Взяв для аргумента значения, равные 0, 1, 2, мы получим значения функции, равные нулю. Возьмем еще значение $x = -1$. Снова получим, что y равно нулю. Соответствующие точки графика $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$, $(-1; 0)$ лежат на оси Ox (рис. 14).

Если ограничиться этими четырьмя значениями аргумента, то «плавной» кривой, соединяющей полученные точки, будет ось абсцисс. Однако ясно, что ось абсцисс не является графиком нашей функции: ведь многочлен (4) не может быть равен нулю при всех значениях x .

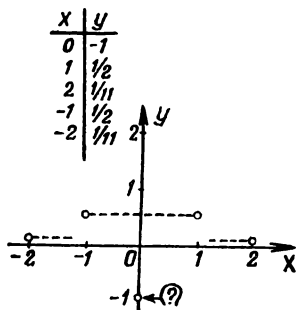


Рис. 13

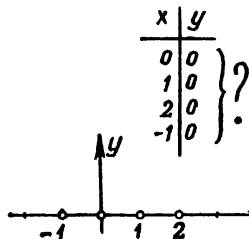


Рис. 14

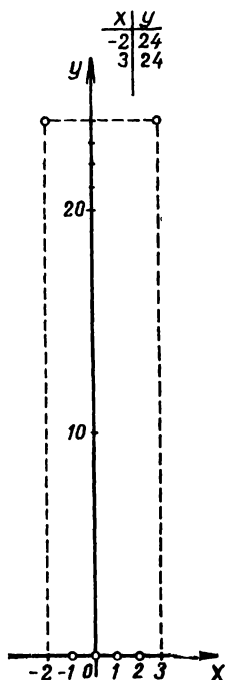


Рис. 15

Возьмем еще два значения аргумента $x = -2$ и $x = 3$. Соответствующие точки $(-2; 24)$ и $(3; 24)$ уже не лежат на оси Ox , а, напротив, расположены очень далеко от нее (рис. 15).

Как выглядит график, остается по-прежнему неясным. Можно, конечно, как мы делали раньше, найти достаточное количество промежуточных точек и приблизительно построить график, но этот способ не очень надежен.

Попробуем поступить иначе.

Выясним, где функция положительна (и, значит, график лежит выше оси Ox) и где отрицательна (т. е. график лежит ниже оси Ox).

Разложим для этого многочлен, задающий функцию, на множители:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x &= x^3(x-2) - \\ &- x(x-2) = (x^3 - x)(x-2) = \\ &= x(x^2 - 1)(x-2) = \\ &= x(x+1)(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Теперь видно, что наша функция равна нулю только в тех четырех точках, которые мы уже нанесли на график. Левее точки $x = -1$ все четыре сомножителя отрицательны — функция положительная. Между точками $x = -1$ и $x = 0$ (т. е. на промежутке $-1 < x < 0$) множитель $x+1$ становится положительным, а остальные остаются отрицательными — функция отрицательна. На участке $0 < x < 1$ имеем два положительных сомножителя и два отрицательных — функция положительна. На следующем участке функция снова отрицательна. Наконец, при переходе через точку $x = 2$ и последний из сомножителей становится положительным — функция становится положительной.

График функции представляется нам теперь примерно в таком виде, как на рисунке 16.

5. Перейдем к построению графика функции

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}, \quad (3)$$

о котором мы уже говорили.

Отметим на рисунке точки графика, отвечающие значениям $x = -1, 0, 1, 2$, и соединим их линиями. Получится примерно так, как на рисунке 17.

Возьмем теперь $x = \frac{1}{2}$. Мы получим $y = -4$, и точка $(\frac{1}{2}; -4)$ лежит гораздо ниже нашей кривой. Значит, между $x=0$ и $x=1$ график идет совсем по-другому!

Более точный ход графика мы изобразим на рисунке 18. Возьмем еще $x = 1\frac{1}{2}$ и $x = 2\frac{1}{2}$. Соответствующие точки довольно хорошо ложатся на нашу кривую.

Но как же проходит график между точками $x=0$ и $x=1$?

Возьмем $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$. Получим соответственно $y = -\frac{16}{13} \approx -1\frac{1}{4}$ и $y = \frac{16}{11} \approx 1\frac{1}{2}$. Ход графика между точками $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$ несколько прояснился (рис. 19), но, как ведет себя функция между $x=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{3}{4}$, по-прежнему непонятно.

Если мы возьмем еще несколько промежуточных значений между $x=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{3}{4}$, то увидим, что соответствующие точки графика ложатся не на одну, а на две

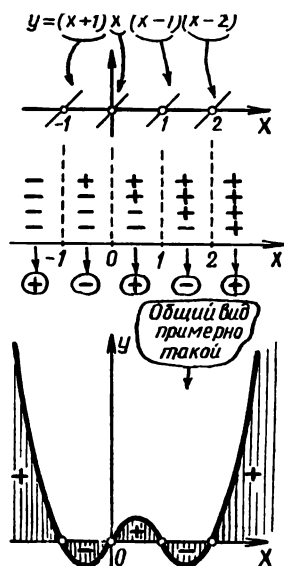


Рис. 16

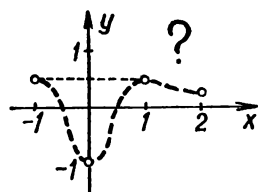


Рис. 17

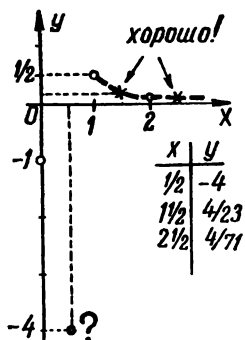


Рис. 18

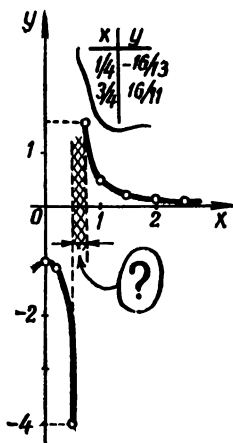


Рис. 19

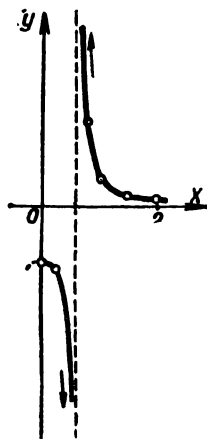


Рис. 20

плавные кривые и график приобретает примерно такой вид, как на рисунке 20.

Вы теперь хорошо понимаете, что построение графика по точкам—это рискованный и длинный путь. Если взять мало точек, то может оказаться, что мы получим совсем неверное представление о функции. Если же брать точки чаще, то будет много лишней работы и все равно останется сомнение, не пропустили ли мы чего-нибудь существенного. Как же быть?

Вспомним, что при построении графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ на участках $2 < x < 3$ и $1 < x < 2$ никаких дополнительных точек не потребовалось, а на участке $0 < x < 1$ пришлось найти еще 5 точек. Так же при построении графика $\frac{1}{3x^2 - 1}$ основной работы потребовал участок $0 < x < 1$, где кривая разрывается на две ветви.

Нельзя ли заранее выделить такие «опасные» участки?

6. Вернемся в третий раз к графику

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}.$$

Если посмотреть на выражение, задающее функцию, то сразу видно, что при двух значениях x знаменатель

этого выражения обращается в нуль. Эти значения равны $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, т. е. примерно $\pm 0,58$. Одно из них лежит в промежутке $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$, т. е. как раз там, где функция ведет себя необычно, график идет неплавно. Теперь понятно, почему это происходит.

Действительно, при значениях $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ функция не определена (деление на нуль невозможно); значит, на графике не может быть точки с такими абсциссами — график не пересекает прямых $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ и $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$. Поэтому график распадается на три отдельные ветви. Если x приближается к одному из «запрещенных» значений, например к $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, то дробь $\frac{1}{3x^2-1}$ неограниченно растет по абсолютной величине — две ветви графика приближаются к вертикальной прямой $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Аналогично ведет себя наша (четная!) функция вблизи точки $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Общий вид графика $y = \frac{1}{3x^2-1}$ показан на рисунке 21.

Мы понимаем теперь, что всегда, когда функция задана формулой, которая представляет собой дробь, необходимо обращать внимание на те значения аргумента, при которых знаменатель обращается в нуль.

7. Какой же урок можно извлечь из рассмотренных примеров? При изучении поведения функции и построения ее графика не все значения аргумента одинаково важны. На примере функции

$$y = \frac{1}{3x^2-1}$$

мы видели, насколько важными являются те «особые» точки, в которых функция не определена. Характер графика

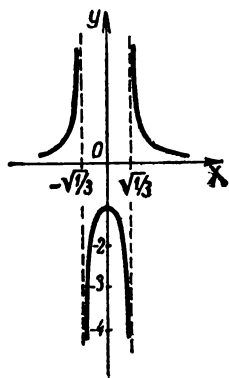


Рис. 21

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \quad (4)$$

нам стал понятен тогда, когда мы нашли точки пересечения графика с осью абсцисс, т. е. корни многочлена.

В большинстве случаев основная работа при построении графиков состоит как раз в том, чтобы найти существенные для данной функции значения аргумента и изучить ее поведение вблизи этих значений. После такого исследования для полного построения графика достаточно бывает найти несколько промежуточных значений функции между этими характерными точками.

Упражнения

3. Постройте график функции $y = \frac{1}{3x-1}$. В каких точках график пересекает ось координат?

Представьте себе, что мы поместили начало координат в самой середине тетрадного листа и взяли за единицу масштаба 1 см (для определенности будем считать тетрадный лист прямоугольником размером 16 см × 20 см). Найдите координаты точек, в которых график уходит за пределы тетрадного листа.

4. Постройте графики многочленов:

а) $y = x^3 - x^2 - 2x + 2$;

б) $y = x^3 - 2x^2 + x$.

(Обратите внимание на то, что в случае б) при разложении на множители получаются два одинаковых множителя.)

8. Построив график какой-либо функции, с помощью разных приемов можно легко построить графики некоторых других функций, «родственных» с первой.

Один из простейших таких приемов—это так называемое *растяжение по оси Oy*.

Мы с вами построили график функции $y = \frac{1}{x^2+1}$ (рис. 12).

Построим теперь график

$$y = \frac{3}{x^2+1}.$$

Возьмем какую-нибудь точку первого графика, например $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{5}$, т. е. точку $M\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right)$. Ясно, что мы можем получить точку второго графика, оставив x тем же (т. е. $x = \frac{1}{2}$) и увеличив y в 3 раза. Получится точка

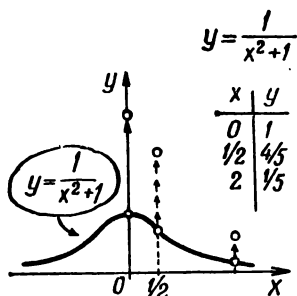


Рис. 22

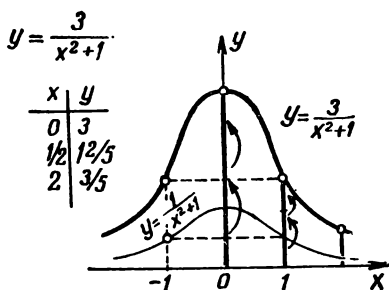


Рис. 23

$M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{12}{5}\right)$. Эту точку можно получить прямо на чертеже (рис. 22). Для этого нужно увеличить ординату точки $M\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right)$ в 3 раза.

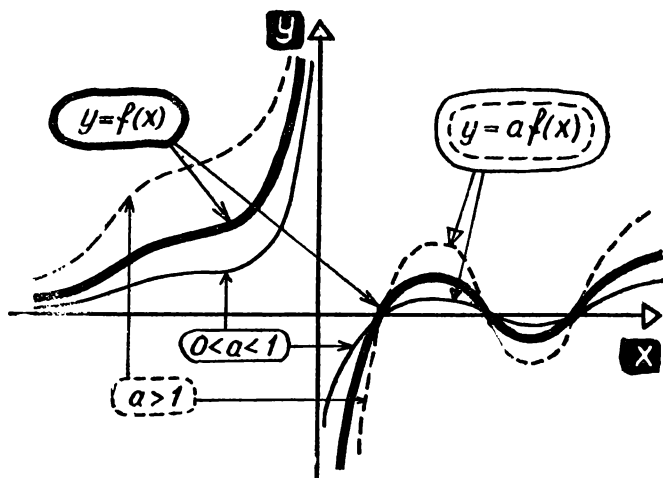
Если мы сделаем такое преобразование с каждой точкой графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, то точка $M(a; b)$ перейдет в точку $M'(a; 3b)$ графика $y = \frac{3}{x^2 + 1}$, а весь график, растянувшись втрое по оси Oy , превратится в график функции $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ (рис. 23).

Итак, график $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ представляет собой график, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, растянутый втрое по оси Oy .

9. Еще проще получить из графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ график функции $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$.

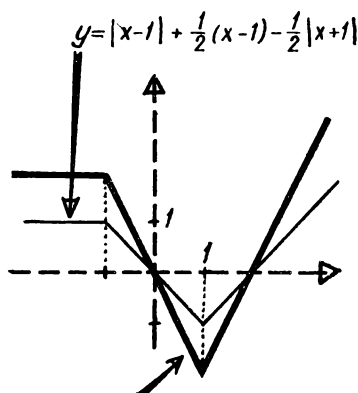
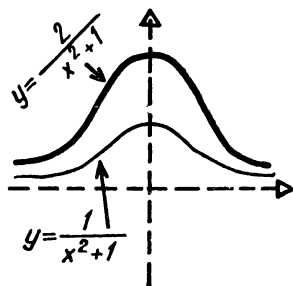
Чтобы получить из таблицы рисунка 11 для функции $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ таблицу для функции $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$, нужно просто поменять знак каждого из чисел второго столбца.

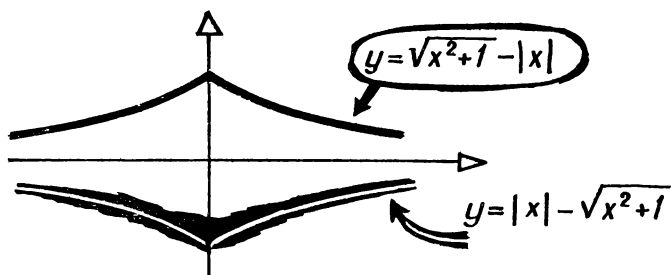
Тогда из каждой точки графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, например из точки M с абсциссой 2 и ординатой $\frac{1}{5}$, получится точка M' графика $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$ с той же абсциссой 2 и противоположной ординатой $\left(-\frac{1}{5}\right)$. Очевидно, точка



$$f(x) \Rightarrow a f(x)$$

График функции $y = a f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в a раз по оси Oy (в случае $|a| < 1$ получается сжатие).





$$y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$$

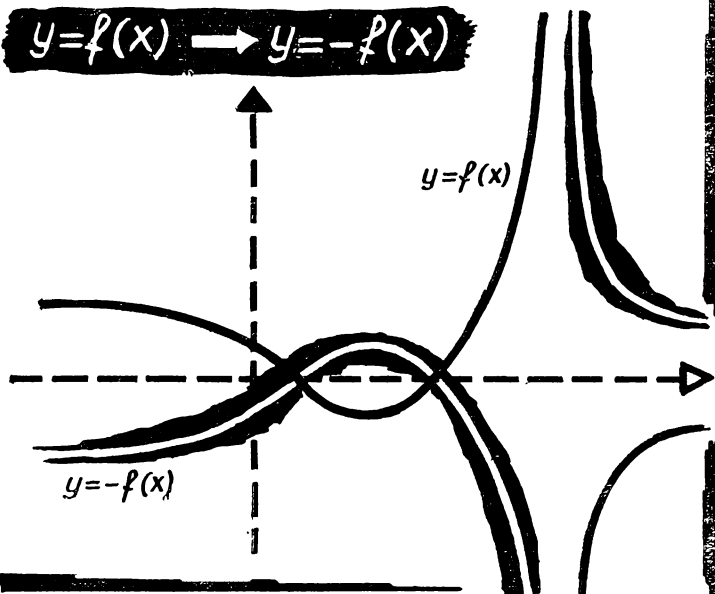
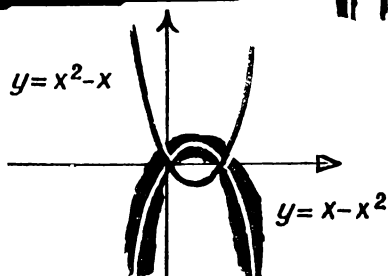


График $y = -f(x)$ может быть получен из графика $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Ox



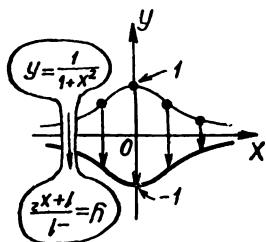


Рис. 24

графика $y = \frac{1}{x^2+1}$ зеркальным отражением относительно оси Ox (рис. 24).

Упражнения

5. Имея график $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ (рис. 16, стр. 239), постройте графики $y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$ и

$$y = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x.$$

6. Постройте график $y = \frac{1}{2x^2+2}$, используя график $y = \frac{1}{x^2+1}$.

7. Постройте графики: а) $y = \frac{1}{2}[x]$;

б) $y = x - [x]$ и $y = -2(x - [x])$;

в) $y = [2x]$.

§ 2. Линейная функция

1. Самая простая функция — это функция $y = x$. Графиком этой функции является прямая — биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 25).

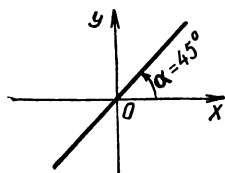


Рис. 25

Вообще, как вы знаете, графиком любой линейной функции

$$y = kx + b$$

является некоторая прямая. Обратно, любая прямая, не параллельная оси Oy , является графиком некоторой линейной функции.

Положение прямой вполне определяется заданием двух ее точек. В соответствии с этим линейная функция вполне определяется заданием ее значений для двух значений аргумента.

Упражнения

8. Линейная функция

$$y = kx + b$$

принимает при $x = -10$ значение $y = 41$, а при $x = 6$ значение $y = 9$. Найдите эту функцию.

9. Прямая проходит через точки $A(0; 0)$ и $B(a; c)$. Найдите линейную функцию, графиком которой является эта прямая.

10. Проведите через начало координат прямую под углом 60° к оси ординат. Графиком какой функции является эта прямая?

11. а) В таблице

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	3	1	2	-3

значение некоторой линейной функции два из пяти значений функции записаны неверно. Найдите их и исправьте.

б) Тот же вопрос для таблицы

x	-15	-10	0	10	15
y	-33	-13	7	+17	+27

2. Характерным свойством линейной функции является то, что, когда x увеличивается равномерно, т. е. на одно и то же число, y меняется тоже равномерно. Возьмем, например, функцию $y = 3x - 2$. Пусть x принимает значения

$$1, 3, 5, 7, \dots,$$

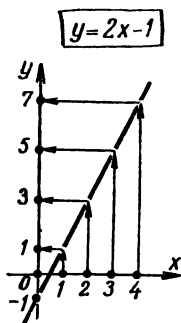


Рис. 26

каждое из которых больше предыдущего на одно и то же число 2. Соответствующие значения y будут:

1, 7, 13, 19, ...

Вы видите, что каждое из значений y больше предыдущего тоже на одно и то же число — на 6.

Последовательность чисел, которая получается из какого-нибудь числа прибавлением одного и того же числа, образует так называемую *арифметическую прогрессию*. Таким образом, характерное свойство, о котором мы говорили,

можно выразить так: *линейная функция переводит одну арифметическую прогрессию в другую арифметическую прогрессию*. В нашем примере функция $y = 3x - 2$ переводит арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, ... в арифметическую прогрессию 1, 7, 13, 19, ..., а на рисунке 26 показано, как функция $y = 2x - 1$ переводит арифметическую прогрессию 0, 1, 2, 3, ... в арифметическую прогрессию -1, 1, 3, 5, 7, ...

Упражнения

12. Придумайте линейную функцию, которая переводила бы арифметическую прогрессию -3, -1, 1, 3, ... и т. д. в арифметическую прогрессию -2, -12, -22, ... и т. д.

Какая линейная функция переведет вторую прогрессию в первую?

13. Пусть даны две арифметические прогрессии:

$$a, a+h, a+2h, \dots \text{ и } c, c+l, c+2l, \dots$$

Всегда ли можно найти линейную функцию $y = kx + b$, которая переводит первую прогрессию во вторую?

14. а) Прямая $y = \frac{7}{15}x + \frac{1}{3}$ проходит через две точки с целыми координатами: $A(10; 5)$ и $B(-20; -9)$. Есть ли на этой прямой еще «целочисленные точки» (т. е. точки с целыми координатами)?

б) Известно, что прямая $y=kx+b$ проходит через две целочисленные точки. Есть ли на этой прямой еще целочисленные точки?

в) Легко построить прямую, не проходящую ни через одну целочисленную точку. Например, $y=x+\frac{1}{2}$.

Может ли какая-нибудь прямая $y=kx+b$ проходить только через одну целочисленную точку?¹

§ 3. Функция $y=|x|$.

1. Рассмотрим теперь функцию $y=|x|$, где $|x|$ означает абсолютную величину, или модуль, числа x .

Построим ее график, пользуясь определением абсолютной величины. При положительных x имеем $|x|=x$, т. е. этот график совпадает с графиком $y=x$ и является лучом, проходящим через начало координат под углом 45° к оси абсцисс (рис. 27). При $x < 0$ имеем $|x|=-x$, значит, для отрицательных x график $y=|x|$ совпадает с биссектрисой второго координатного угла (рис. 28).

Впрочем, вторую половину графика (для отрицательных значений x) легко получить из первой, если заметить, что функция $y=|x|$ четная, так как $|-a|=|a|$. Значит, график этой функции симметричен относительно оси Oy , и вторую половину графика можно получить, отразив относительно оси ординат часть, начерченную для x положительных. Получается график, изображенный на рисунке 29.

2. Построим теперь график

$$y=|x|+1.$$

Этот график легко построить непосредственно. Однако мы его полу-

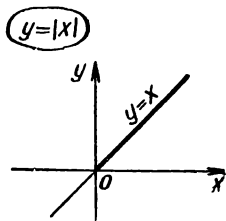


Рис. 27

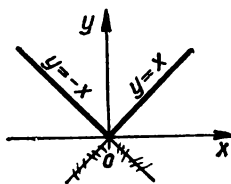


Рис. 28

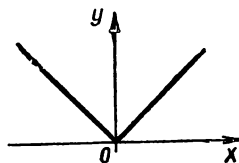


Рис. 29

¹ Подумайте над этим вопросом. Если вы не сможете найти ответа, посмотрите задачу 78.

$$a) y=|x|$$

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
...	...

$$б) y=|x|+1$$

x	y
-2	3
-1	2
0	1
1	2
2	3
...	...

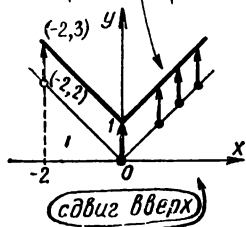


Рис. 30

Задача. Постройте функции

$$y=|x|-1.$$

Решение. Сравним этот график с графиком $y=|x|$. Если $x=a$, $y=|a|$ — точка первого графика, то точка $x=a$, $y=|a|-1$ будет лежать на втором графике. Поэтому каждая точка $(|a|; |a|-1)$ второго графика может быть получена из точки $(a; |a|)$ первого графика сдвигом вниз на 1 единицу, и весь график получается, если график $y=|x|$ сдвинуть вниз на 1 (рис. 31).

Такой сдвиг вдоль оси Oy полезен при построении многих графиков (см. стр. 252).

Пусть надо построить график функции

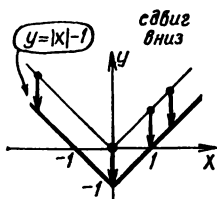


Рис. 31

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}.$$

Представим эту функцию в виде

$$y = \frac{x^2 + 1 + 1}{x^2 + 1},$$

или

$$y = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Теперь ясно, что ее график может быть получен из графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ сдвигом вдоль оси Oy на 1 вверх.

3. Возьмем теперь функцию

$$y = |x + 1|.$$

График этой функции мы тоже получим из графика $y = |x|$. Напишем опять рядом две таблицы: для $y = |x|$ и для $y = |x + 1|$ (табл. а, б, рис. 32). Если сравнивать значения этих функций при одинаковых x , то окажется, что для некоторых x ордината первого графика больше, чем второго, а для некоторых — наоборот.

Однако, если внимательно посмотреть на правые столбцы этих двух таблиц, связь между таблицами можно установить. Именно вторая функция принимает те же самые значения, что и первая, только принимает их *на единицу раньше*, при меньших значениях. (Почему?) Значит, из каждой точки первого графика $y = |x|$ получается точка второго графика $y = |x + 1|$, сдвинутая на 1 влево; например, из точки $(-1; 1)$ получается точка с координатами $(-2; 1)$ (рис. 32). Поэтому и весь график $y = |x + 1|$ получится, если сдвинуть график $y = |x|$ на 1 влево вдоль оси абсцисс.

Задача. Построить график функции

$$y = |x - 1|.$$

Решение. Сравним его с графиком $y = |x|$. Если A — точка графика $y = |x|$ с координатами $(a; |a|)$, то точкой второго графика $y = |x - 1|$ с тем же значением ординаты y будет точка $A'(a + 1; |a|)$. (Почему?) Эту точку второго графика можно получить из точки $A(a; |a|)$ первого графика сдвигом вдоль оси Ox вправо. Значит, и весь график $y = |x - 1|$ получается из гра-

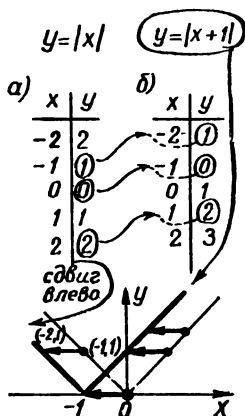


Рис. 32

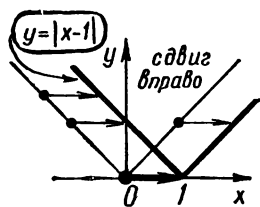


Рис. 33

$$f(x) \rightarrow f(x) + a$$

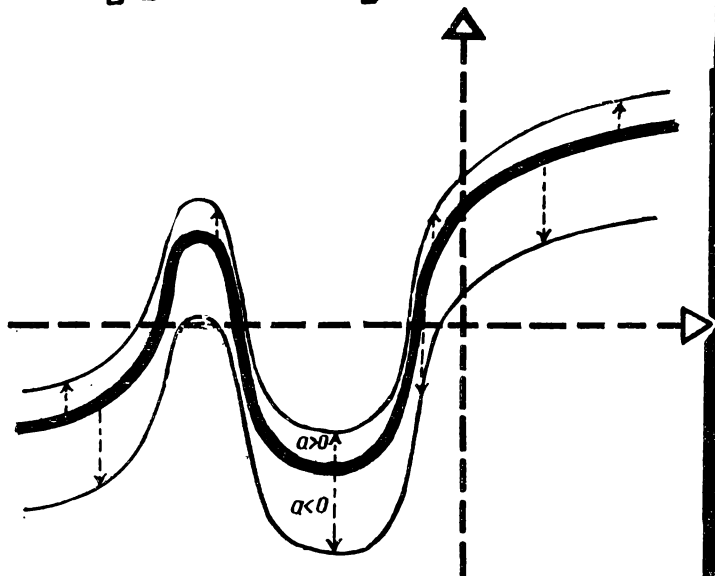
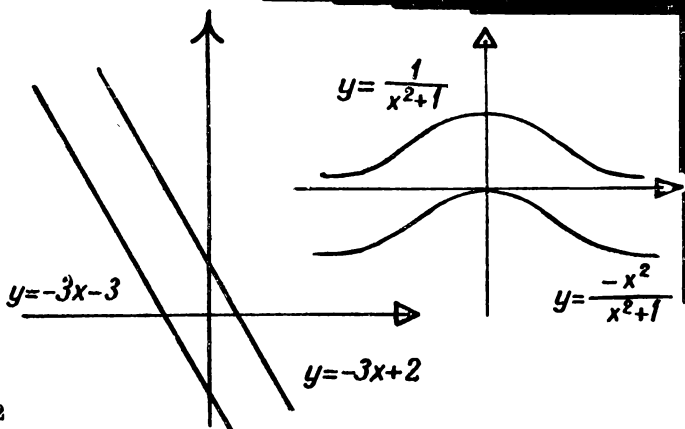


График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на a единиц. При этом направления сдвига определяется знаком числа a (т.е. при $a > 0$ график сдвигается вверх, при $a < 0$ — вниз).



фика $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox вправо на 1 (рис. 33). Мы можем сказать, что функция $y = |x - 1|$ принимает те же значения, что и функция $y = |x|$, только с некоторым запозданием (а именно на 1).

Такой сдвиг вдоль оси Ox полезен при построении многих графиков (см. стр. 254).

Упражнения

15. Постройте график функции $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

Указание. Представьте знаменатель данной дроби в виде $(x-1)^2 + 1$. Ответ дан на рисунке 40.

16. Сформулируйте правила, по которым из графика функции $y = f(x)$ можно получить графики функций: $y = f(x+5)$ и $y = f(x-3)$.

17. Постройте графики $y = |x| + 3$ и $y = |x + 3|$.

Задача. Постройте график $y = |x + 1| + |x - 1|$.

Решение. Построим сначала на одном чертеже графики каждого из слагаемых:

$$y = |x + 1| \text{ и } y = |x - 1|.$$

Ордината y искомого графика получается сложением ординат двух построенных графиков в этой же точке. Так, например, если $x = 3$, то ордината y_1 первого графика равна 4, ордината y_2 второго графика равна 2, а ордината y графика $y = |x + 1| + |x - 1|$ равна 6.

Попробуем получить искомый график, складывая в каждой точке (т. е. при каждом x) ординаты обоих графиков. Получим чертеж, данный на рисунке 34.

Мы видим, что графиком $y = |x + 1| + |x - 1|$ является ломаная, составленная из кусков трех прямых. Значит, на каждом из трех участков функция меняется линейно.

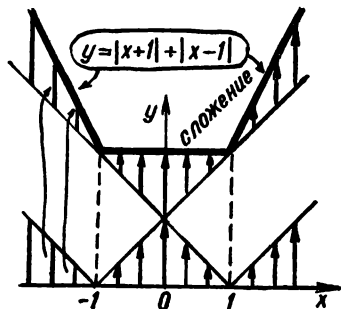


Рис. 34

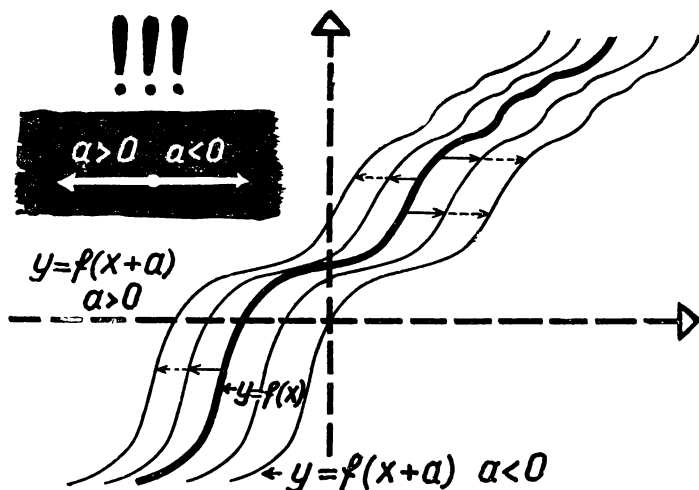
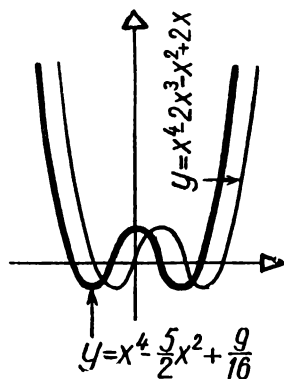
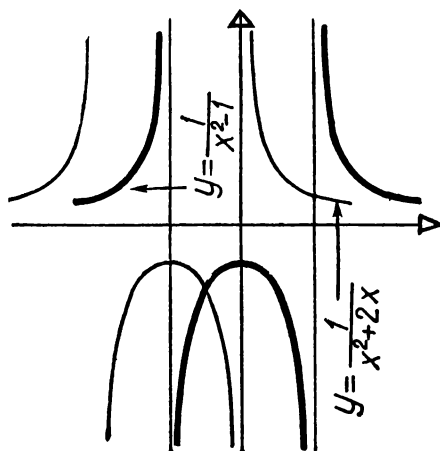


График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $-a$ единиц. Знак „минус“ означает, что если $a > 0$, график сдвигается влево, если $a < 0$, график сдвигается вправо.

$f(x) \rightarrow f(x+a)$



Упражнения

18. Напишите уравнения для каждого из звеньев ломаной

$$y = |x + 1| + |x - 1|.$$

Ответ: для $x < -1$ $y = -2x$,
 для $-1 \leq x \leq 1$ $y = \dots$,
 для $x > 1$ $y = \dots$.

19. В каких точках имеются изломы у ломаной, являющейся графиком функции $y = |x| + |x + 1| + |x + 2|$? Напишите уравнения каждого из звеньев.

20. а) Функцию, график которой изображен на рисунке 35, можно задать следующими условиями:

$$\text{при } x < 0 \quad y = 0,$$

$$\text{при } x \geq 0 \quad y = 2x.$$

Попробуйте задать эту функцию одной формулой.

б) Напишите формулы для функций, имеющих графики, изображенные на рисунках 36 и 37.

21. Постройте график функции $y = |3x - 2|$.

У к а з а н и е. Получите этот график из графика $y = |x|$ двумя преобразованиями: сдвигом по оси Ox и растяжением по оси Oy . Чтобы правильно определить величину сдвига, нужно вынести коэффициент при x за знак модуля: $|3x - 2| = 3 \left| x - \frac{2}{3} \right|$.

З а д а ч а. Построить график $y = |2x - 1|$.

Р е ш е н и е. Получим этот график из прямой $y = 2x - 1$ (рис. 38). Там, где прямая идет выше оси абсцисс, y положителен, т. е. $2x - 1 > 0$. Значит, на этом участке $|2x - 1| = 2x - 1$ и искомый график $y = |2x - 1|$ совпадает с графиком $y = 2x - 1$. Там, где $2x - 1 < 0$ (т. е. прямая

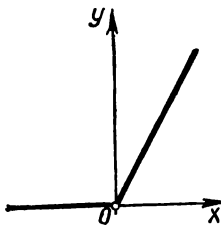


Рис. 35

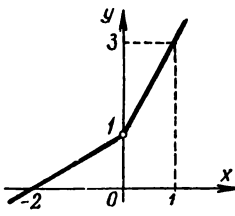


Рис. 36

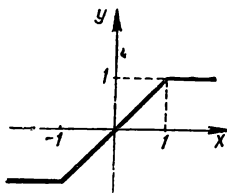


Рис. 37

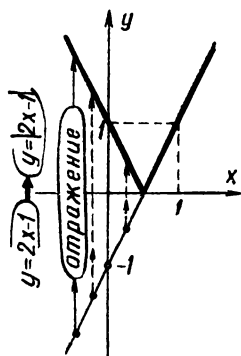


Рис. 38

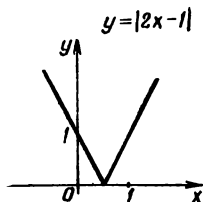


Рис. 39

$y = 2x - 1$ идет ниже оси Ox), $|2x - 1| = -(2x - 1)$. Значит, чтобы на этом участке из графика $y = 2x - 1$ получить график $y = |2x - 1|$, нужно у каждой точки прямой $y = 2x - 1$ поменять знак ординаты, т. е. отразить эту прямую относительно оси абсцисс. Получаем рисунок 39.

Упражнения

22. Зная график $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ (рис. 16, стр. 239), постройте график

$$y = |x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x|.$$

Задача. Зная график

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad (1)$$

(рис. 40), построить график

$$y = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}. \quad (2)$$

Решение. Так как для положительных значений аргумента $|x| = x$, то при $x > 0$

$$\frac{1}{x^2 - 2|x| + 2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

Значит, справа от нуля график (2) совпадает с графиком (1) (рис. 41). Чтобы получить левую половину искомого графика (2), заметим, что функция $y = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}$ четная. Значит, левая половина графика (2) получается

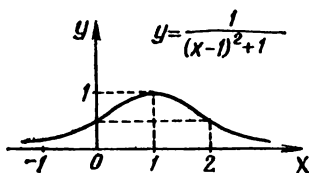


Рис. 40

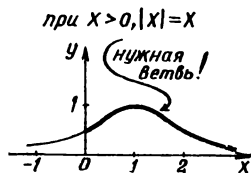
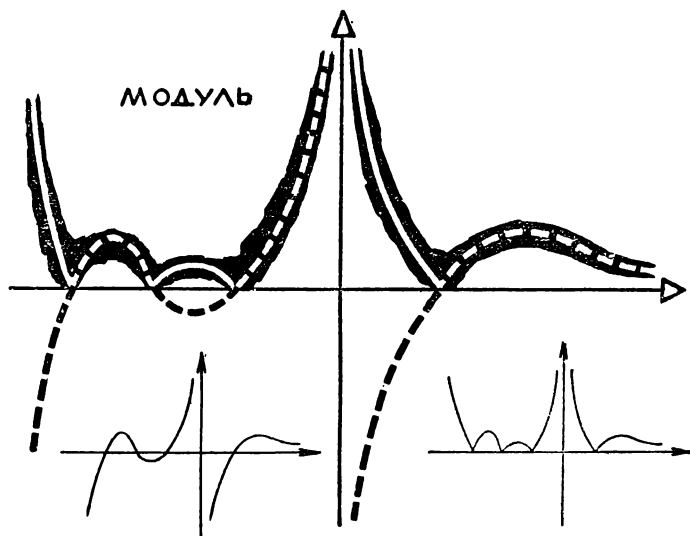


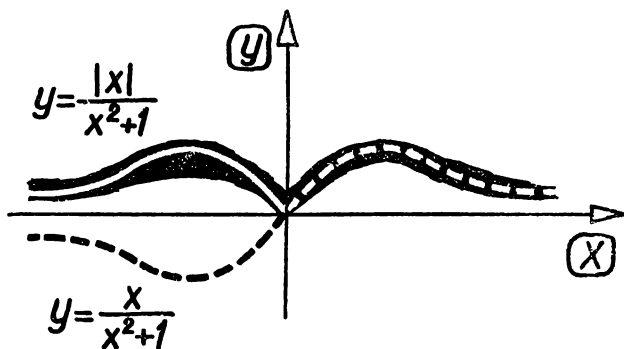
Рис. 41



$f(x)$

$|f(x)|$

Чтобы из графика $y=f(x)$ получить график $y=|f(x)|$, нужно участки графика $y=f(x)$, лежащие выше оси абсцисс, оставить без изменения, а участки, лежащие ниже оси абсцисс, отразить относительно этой оси.



$$\frac{1}{(-x)^2 - 2|x| + 2} = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}$$

четная!

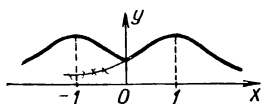


Рис. 42

из его правой половины зеркальным отражением относительно оси ординат (рис. 42).

То же самое верно и в общем случае: чтобы получить из графика $y = f(x)$ график $y = f(|x|)$, нужно правую половину первого графика (лежащую справа от оси ординат) отразить зеркально относительно оси ординат.

Упражнения

23. Постройте график $y = 2|x| - 1$.

24. Постройте графики:

а) $y = 4 - 2x$;

в) $y = 4 - 2|x|$;

б) $y = |4 - 2x|$;

г) $y = |4 - 2|x||$.

25. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |x - 2| + |x| + |x + 2| + |x + 4|.$$

В заключение этого параграфа предлагаем вам решить несколько задач. На первый взгляд кажется, что они совершенно не имеют никакого отношения к тому, чем мы занимались в этом параграфе, но, подумав, вы увидите, что это не так.

Задачи

26. Семь спичечных коробок расположены в ряд. В первой лежит 19 спичек, во второй 9 спичек, в следующих соответственно 26, 8, 18, 11 и 14 спичек (рис. 43). Спички можно перекладывать из любой коробки в любую соседнюю с ней. Нужно переложить спички так, чтобы во всех коробках спичек стало поровну. Как это сделать, перекладывая как можно меньше спичек?

Решение. Всего во всех коробках содержится 105 спичек. Значит, если спичек в коробках было бы поровну, то в каждой коробке лежало бы по 15 спичек. При таком расположении коробок задача имеет всего одно решение. Именно из шестой коробки в седьмую

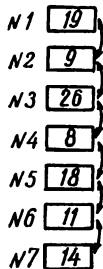


Рис. 43

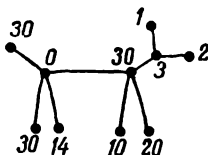


Рис. 44

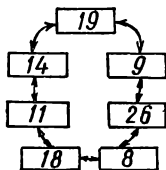


Рис. 45

надо переложить 1 спичку, из пятой в шестую 5 спичек и т. д.

Следующие две задачи несколько более трудные.

27. На прямой расположены по-прежнему 7 коробок со спичками, но количество спичек в коробках другое. Именно в первой лежит 1 спичка, во второй 2, в следующих 3, 72, 32, 20, 10.

28. Коробки со спичками расположены «собачкой» (см. рис. 44).

Спички можно перекладывать только по линиям (маршрутам), соединяющим коробки.

Для следующей задачи уже полезно применить графики.

29. На окружности расположено 7 коробок со спичками. В первой лежит 19 спичек, во второй 9 спичек, в остальных соответственно 26, 8, 18, 11, 14 спичек (см. рис. 45). Разрешается перекладывать спички из любой коробки в любую из соседних с ней. Требуется переложить спички так, чтобы во всех коробках спичек стало поровну. Как это сделать, перекладывая как можно меньше спичек?

§ 4. Квадратный трехчлен

1. Перейдем теперь к функции

$$y = x^2.$$

Вы, конечно, строили ее график и знаете, что у этой кривой есть специальное название — *парабола*. Графики функций $y = ax^2$ получаются из графика $y = x^2$ растяжением и тоже называются параболой¹.

¹ Заметим, что все параболы подобны друг другу (см. задачи 90, 91, 92).

Упражнение

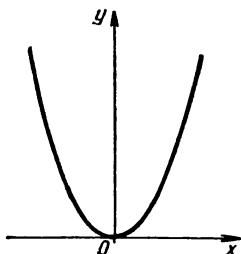


Рис. 46

30. На рисунке 46 изображена парабола. а) Известно, что это график функции $y = x^2$. Определите масштаб (масштаб по обеим осям одинаков). б) Какую надо взять единицу масштаба по осям, чтобы та же кривая (рис. 46) служила графиком функции $y = 5x^2$?

2. Посмотрим, как будут меняться значения функции $y = x^2$, если значения аргумента меняются на одну и ту же величину, т. е. составляют арифметическую прогрессию. Для простоты рассмотрим положительные значения x . Например, пусть x принимает значения:

1, 2, 3, 4, ... и т. д.

Тогда y будет принимать значения:

1, 4, 9, 16, ... и т. д.

Вы видите, что значения y уже не образуют арифметической прогрессии.

Добавим к таблице значений аргумента и функции еще один столбец. В этом столбце мы будем записывать, на сколько меняется значение y , когда аргумент x переходит от своего значения к следующему. Например, пусть аргумент меняется от значения $x = 2$ до значения $x = 3$. Тогда функция меняется от значения $y = 4$ до значения $y = 9$. Изменение, или, как говорят, *приращение* функции¹, равно разности нового и старого значения функции, т. е. $9 - 4 = 5$.

Итак, в третьем столбце нашей таблицы мы запишем приращения функции $y = x^2$. Теперь ясно видно, что функция $y = x^2$ изменяется так, что при возрастании x возрастает не только сама функция, но и ее приращения. На графике этот факт тоже виден: кривая $y = x^2$ все круче и круче идет вверх, в то время как график линейной функции, которая изменяется равномерно, идет все время под одним и тем же углом к оси Ox (рис. 47).

¹ Приращение функции $y = f(x)$ обозначается обычно греческой буквой Δ (дельта):

$$\Delta y, \text{ или } \Delta f(x).$$

Интересно заметить, что приращения функции $y = x^2$ составляют арифметическую прогрессию! Попробуйте доказать этот факт в общем виде: если значения аргумента x образуют арифметическую прогрессию

$$a, a + d, a + 2d, \dots,$$

то значения соответствующих приращений квадратичной функции $y = x^2$ также образуют арифметическую прогрессию.

Если аргумент t есть время, а функция s — пройденный путь (мы меняем обозначения x на t и y на s в соответствии с тем, как это принято в физике), то зависимость $s = t^2$ соответствует равноускоренному движению (с ускорением, равным 2), а формула $s = kt + b$ — равномерному движению со скоростью k . При равномерном движении за равные промежутки времени тело проходит равные отрезки пути, т. е. равным приращениям аргумента соответствуют равные приращения функции (линейная функция переводит каждую арифметическую прогрессию в арифметическую прогрессию). При равноускоренном движении отрезки пути, пройденные за равные промежутки времени, равномерно возрастают. Соответственно этому для квадратичной функции (кстати, не только для $y = x^2$, но и для любой функции $y = ax^2 + bx + c$) равным приращениям аргумента соответствуют равномерно возрастающие приращения функции.

x	y	приращение
1	1	
2	4	$4 - 1 = 3$
3	9	$9 - 4 = 5$
4	16	$16 - 9 = 7$
5	25	$25 - 16 = 9$
\vdots	\vdots	\vdots

приращение приращения = 2

(постоянно!)

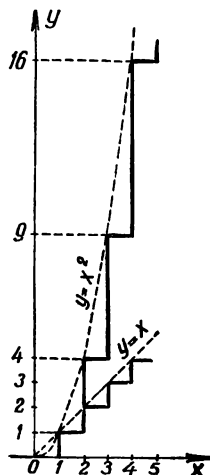


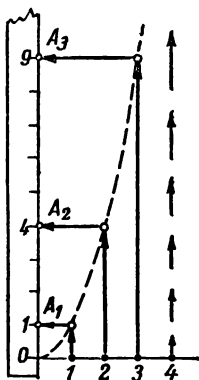
Рис. 47

Упражнения

31. Составьте таблицу с тремя столбцами (значения аргумента, значения функции и значения приращений функции) для трехчлена $y = x^2 + x - 3$, взяв для x значения 1, 0, -1, -2, -3. Добавьте к таблице еще один столбец. В этот столбец запишите разности двух последовательных приращений.

Возьмите теперь другой трехчлен: $x^2 + 3x + 5$. Составьте и для него такую же таблицу. Сравните последние столбцы этих двух таблиц. А что получится, если взять трехчлен $y = 2x^2 + 3x + 5$?

а)



б)

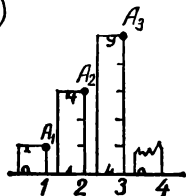


Рис. 48

32. Из рисунка 48, а видно, что если взять на положительной половине оси абсцисс равномерную шкалу, то график $y = x^2$ переведет ее в шкалу O, A_1, A_2, A_3 и т. д., расположенную на оси ординат, которая уже не будет равномерной. Этой шкалой ось ординат разбилась на отрезки OA_1, A_1A_2, A_2A_3 и т. д. Представьте себе, что вы разрезали ось ординат на эти отрезки и поставили их вертикально один за другим вдоль оси x на равных расстояниях друг от друга (основаниями в точки 1, 2, 3 и т. д.) (рис. 48, б). Как расположатся концы этих отрезков? Объясните результат.

33. Рассмотрим график $y = x^3$ для положительных значений x (рис. 49). Прodelайте с ним то же самое, что и с графиком $y = x^2$ в упражнении 32. Нарисуйте, как расположатся концы отрезков в этом случае. Более трудный вопрос: не можете ли вы подобрать уравнение кривой, на которой лежат концы отрезков?

34. Постройте график $y = x^2$. Масштаб возьмите покрупнее: 1—2 см (4 клетки). Отметьте на оси Oy точку $F(0; \frac{1}{4})$. Полоской бумаги измерьте расстояние от точки F до какой-нибудь точки M параболы. Затем приколите полоску в точке M и поверните ее вокруг этой точки так, чтобы она стала вертикальной. Конеч полоски опустится немного ниже оси абсцисс. Отметьте на полоске, на сколько она выйдет за ось абсцисс (рис. 50). Возьмите теперь другую точку на параболы и повторите измерение еще раз. На сколько теперь опустился край полоски за ось абсцисс? Результат мы вам сможем сказать заранее: какую бы точку на параболы $y = x^2$ вы ни взяли, расстояние этой точки до точки $(0; \frac{1}{4})$ будет больше расстояния от той же точки до оси абсцисс всегда на одно и то же число — на $\frac{1}{4}$.

Можно сказать иначе: расстояние от любой точки параболы до точки $(0; \frac{1}{4})$ равно расстоянию от той же точки параболы до прямой $y = -\frac{1}{4}$, параллельной оси Ox .

Эта замечательная точка $F(0; \frac{1}{4})$ называется *фокусом* параболы $y = x^2$, а прямая $y = -\frac{1}{4}$ — *директрисой* этой параболы.

Директриса и фокус есть у всякой параболы.

3. Рассмотрим графики квадратных трехчленов вида

$$y = x^2 + px + q.$$

Покажем, что они по форме ничем не отличаются от параболы и занимают лишь другое положение относительно координатных осей.

Рассмотрим сначала пример. Возьмем трехчлен

$$y = x^2 + 2x + 3$$

и представим его в виде

$$y = (x + 1)^2 + 2,$$

выделив полный квадрат.

График $y = (x + 1)^2 + 2$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox . (Объясните, почему кривая $y = (x + 1)^2$ получается из $y = x^2$ сдвигом влево.) Из графика $y = (x + 1)^2$ график $y = (x + 1)^2 + 2$ получается совсем просто (рис. 51).

Итак, график трехчлена $y = (x + 1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом влево на 1 единицу и вверх на 2 единицы. При таком преобразовании вершина

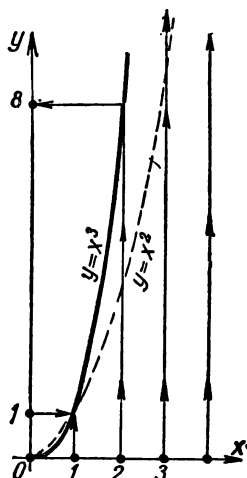


Рис. 49

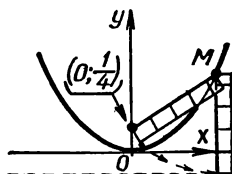


Рис. 50

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ y &= (x+1)^2 + 2 = \\ &= x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

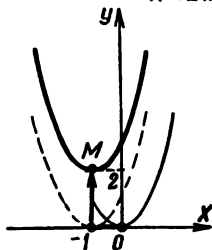


Рис. 51

параболы, помещавшаяся в точке $(0; 0)$ — начале координат — переходит в точку M с координатами $(-1; 2)$.

Упражнения

35. Нарисуйте графики функций:

а) $y = (x + 2)^2 + 3$; в) $y = (x - 2)^2 + 3$;

б) $y = (x + 2)^2 - 3$; г) $y = (x - 2)^2 - 3$.

36. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + 6x + 5.$$

Решение. Наименьшее значение этой функции — это ордината вершины параболы $y = x^2 + 6x + 5$. Чтобы определить координаты вершины, выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + px + q$$

$$= (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4.$$

Таким образом, наша парабола получилась из $y = x^2$ сдвигом по Ox на -3 единицы и на -4 по оси Oy , т. е. наименьшее значение функции равно -4 .

б) Вершина параболы $y = x^2 + px + q$ лежит в точке $(-1; 2)$. Найти p и q .

Докажем теперь, что, сдвигая параболу $y = x^2$, можно получить график любого квадратного трехчлена вида

$$y = x^2 + px + q.$$

Для этого, как и выше, выделим полный квадрат, т. е. представим наш трехчлен в виде $y = (x + \dots)^2 + \dots$, где второе слагаемое в скобке и свободный член нужно подобрать не зависящими от x .

После раскрытия скобок член с первой степенью x получается лишь в удвоенном произведении, и так как этот член должен быть равен px , то второе слагаемое

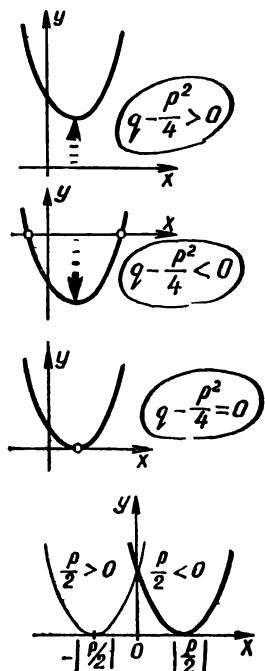


Рис. 52

в скобках нужно взять равным $\frac{p}{2}$. Таким образом, мы имеем

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \dots = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \dots$$

Так как свободный член трехчлена должен быть равен q , то вместо многоточия нужно взять $q - \frac{p^2}{4}$.

Итак, трехчлен $y = x^2 + px + q$ можно переписать в виде

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Мы видим (рис. 52), что график

$$y = x^2 + px + q$$

представляет собой параболу $y = x^2$, сдвинутую на $-\frac{p}{2}$ по оси Ox и на $q - \frac{p^2}{4}$ по оси Oy .

Сдвиг на $-\frac{p}{2}$ по оси Ox означает сдвиг вправо, если $-\frac{p}{2} > 0$, и сдвиг влево, если $-\frac{p}{2} < 0$.

Вершина M этой параболы имеет абсциссу $x_M = -\frac{p}{2}$ и ординату $y_M = q - \frac{p^2}{4}$.

4. Взяв «за основу» график $y = ax^2$, можно таким же образом получить график квадратного трехчлена более общего вида

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Разберем это на примере. Возьмем трехчлен $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$. Вынесем коэффициент при x^2 за скобку:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12).$$

В выражении, стоящем в скобках, выделим полный квадрат:

$$\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12) = \frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot 3x + 9 + 3) = \frac{1}{2}((x - 3)^2 + 3).$$

Итак, окончательно

$$y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{3}{2}.$$

Мы видим, что график $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ получается из параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвигом по оси Ox на 3 единицы вправо и по оси Oy на $\frac{3}{2}$ единицы вверх.

Упражнения

37. Сдвиньте параболу ax^2 по оси Ox и по оси Oy так, чтобы получить график трехчлена $y = ax^2 + bx + c$.

О т в е т. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ получается из параболы $y = ax^2$ сдвигом по оси абсцисс на $-\frac{b}{2a}$ и по оси ординат на $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

38. Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ на участках:

- а) от $x = 0$ до $x = 5$ ($0 \leq x \leq 5$);
- б) от $x = -5$ до $x = 0$ ($-5 \leq x \leq 0$).

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи и построим график функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ (рис. 53, а, б).

По рисунку видно, что при изменении x от значения $x = 0$ до значения $x = 5$ функция $y = 2x^2 - 4x + 5$ сначала убывает (до $x = 1$), затем возрастает. Таким образом, наи-

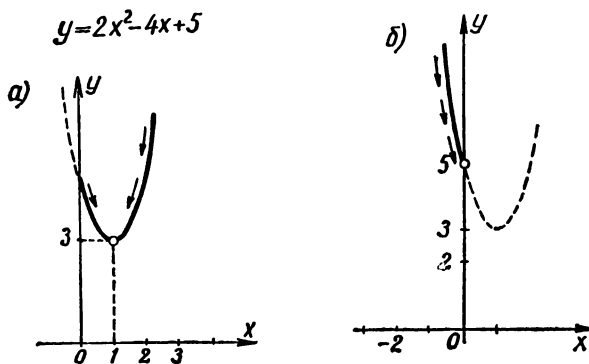


Рис. 53

меньшее значение этой функции на участке а) есть ее значение при $x=1$ (рис. 53, а). При изменении x от -5 до 0 функция $y=2x^2-4x+5$ все время убывает. Значит, наименьшее значение функции на участке б) есть ее значение при $x=0$.

Ответ. Наименьшее значение на участке а) равно 3, на участке б) равно 5.

39. Нарисуйте графики следующих функций, указав точные координаты вершины каждой из парабол и координаты точек пересечения графиков с осями координат:

- а) $y = x - x^2 - 1$;
- б) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
- в) $y = 10x^2 - 10x + 3$;
- г) $y = 0,125x^2 + x + 2$.

40. График какой функции получится, если параболу $y=x^2$ сначала растянуть по оси ординат в два раза, а потом сдвинуть по той же оси на три единицы вниз? График какой функции получится, если эти два преобразования проделать в обратном порядке; сначала сдвинуть параболу $y=x^2$ на три единицы вниз, а потом полученную кривую растянуть в два раза вдоль оси Oy (рис. 54)?

41. На сколько нужно сдвинуть параболу $y=x^2-3x+2$ по оси Ox и по оси Oy , чтобы получилась параболa $y=x^2+x+1$?



Рис. 54

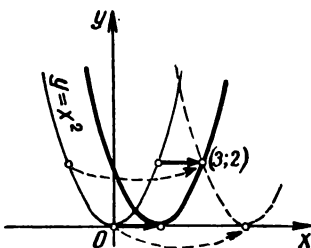


Рис. 55

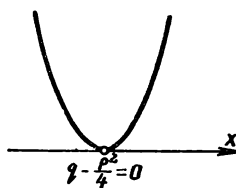
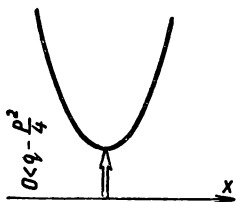
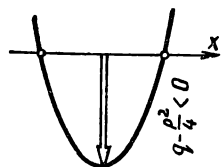


Рис. 56

$y = x^2$ сдвигается вниз, если $q - \frac{p^2}{4} < 0$, и вверх, если $q - \frac{p^2}{4} > 0$ (рис. 56).

Если же $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то наше квадратное уравнение превращается в уравнение $(x + \frac{p}{2})^2 = 0$. Этот случай особенно интересен. Рассмотрим его подробно.

Уравнение $x - 2 = 0$ имеет одно решение $x = 2$. Уравнение $(x - 2)^2 = 0$ тоже имеет лишь решение $x = 2$: ведь никакое другое число не удовлетворяет этому уравнению.

Однако в первом случае мы говорим, что уравнение $x - 2 = 0$ имеет один корень, а во втором случае мы говорим, что уравнение $(x - 2)^2 = 0$ имеет кратный корень или два равных корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$.

Как же объяснить это различие?

Есть несколько способов это сделать. Мы приведем один из них. Изменим немного первое уравнение: заменим нуль в правой части каким-нибудь маленьким числом. Корень, конечно, изменится, но он по-прежнему

42. Сдвиньте параболу $y = x^2$ вдоль оси Ox так, чтобы она прошла через точку $(3; 2)$. График какой функции вы при этом получите (рис. 55)?

43. Посмотрим теперь, что можно сказать по графику функции $y = x^2 + px + q$ о решении квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Корни этого уравнения — это те значения x , при которых значение функции $y = x^2 + px + q$ равно нулю. На графике эти точки имеют ординаты, равные нулю, т. е. лежат на оси абсцисс.

Из графика квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$ сразу видно, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два действительных корня, если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, и не имеет корней, если $\frac{p^2}{4} - q < 0$ (вспомните, что параболу

останется единственным: уравнению по-прежнему будет удовлетворять только одно число. Например,

$$x-2=0,01, \quad x=2,01.$$

Изменим теперь таким же образом второе уравнение:

$$(x-2)^2=0,01, \quad x^2-4x+3,99=0.$$

Полученное уравнение теперь будет иметь два корня: $x_1=2,1$ и $x_2=1,9$. Будем теперь в уравнении $(x-2)^2=0,01$ опять менять правую часть, заменяя ее все меньшими и меньшими числами. До тех пор, пока эта правая часть не будет равна нулю, уравнение будет иметь два различных корня. С уменьшением правой части корни будут «сближаться», так что их значения будут отличаться друг от друга на все меньшую и меньшую величину. Наконец, когда правая часть станет равной нулю, два корня «соются» в один — значения двух корней станут равными друг другу. Поэтому говорят, что уравнение $(x-2)^2=0$ имеет два корня, слившихся в один двукратный корень.

Геометрически случай слившихся корней соответствует касанию параболы $y=(x-2)^2$ с осью Ox .

5. Общий случай квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ мы разберем геометрически. Пусть сначала свободный член q меньше $\frac{p^2}{4}$ (т. е. $q-\frac{p^2}{4}<0$), так что парабола $y=x^2+px+q$ имеет две точки пересечения с осью абсцисс (рис. 57). Будем увеличивать свободный член: первое время парабола, двигаясь вверх, все еще будет иметь две точки пересечения с осью Ox (уравнение $x^2+px+q=0$ тогда имеет два различных корня), затем эти точки пересечения, сближаясь, в некоторый момент (когда $q-\frac{p^2}{4}=0$) сливаются в одну. В этот момент парабола $y=x^2+px+q=$
 $=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ касается оси Ox , а уравнение $x^2+px+\frac{p^2}{4}=0$ имеет один двукратный корень. При дальнейшем увели-

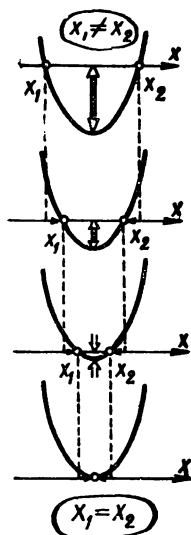


Рис. 57

чении свободного члена парабола перестанет пересекать ось Ox и уравнение $x^2 + px + q = 0$ не будет иметь действительных корней.

Упражнения

44. Найдите параболу $y = ax^2 + bx + c$, которая пересекает ось абсцисс в точках $x = 3$ и $x = -5$, а ось Oy в точке $y = 30$.

Решение. Квадратный трехчлен, задающий эту параболу, будет иметь вид:

$$a(x-3)(x+5).$$

Точка пересечения с Oy получается при $x = 0$. Значит, при $x = 0$ наша функция должна равняться 30. Получаем $a(-3)(+5) = 30$, откуда $a = -2$.

Ответ. Парабола $y = -2x^2 - 4x + 30$.

45. а) Найдите квадратный трехчлен вида $x^2 + px + q$, если его график пересекает ось абсцисс в точках $x = 2$ и $x = 5$.

б) Найдите кубический многочлен вида $x^3 + px^2 + qx + r$, если известно, что его график пересекает ось Ox в точках $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$.

в) Не можете ли вы придумать многочлен, график которого пересекал бы ось Ox в 101-й точке: $x = -50$, $x_2 = -49$, $x_3 = -48$, ..., $x_{101} = 50$?

Какова наименьшая степень таких многочленов?

46. Трехчлен $-x^2 + 6x - 9$ имеет два одинаковых корня;

а) измените на 0,01 свободный член так, чтобы у полученного трехчлена было два различных корня;

б) можно ли добиться того же результата, изменяя на 0,01 только коэффициент при x ?

47. На рисунке 58 1) и 2) изображены графики квадратных трехчленов $y = x^2 + px + q$. Найдите p и q . Нарисуйте график 2), выбрав более удачно масштаб и положение осей.

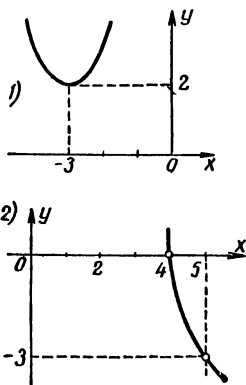


Рис. 58

48. На рисунке 59 1), 2) и 3) изображены графики квадратных трехчленов $y = ax^2 + bx + c$. Найдите a , b и c .

49. а) Решите неравенство

$$x^2 + 5x + 4 > 0.$$

Решение. Из рисунка 60 видно, что функция $y = x^2 - 5x + 4$ положительна на двух участках: при x , меньших 1, и при x , больших 4.

Ответ. $x < 1$ и $x > 4$.

б) Решите неравенство

$$x - 1 < |x^2 - 5x + 4|.$$

Решение. Нарисуем на одном чертеже графики функций, стоящих в правой и левой частях. По рисунку 61 видно, что прямая $y = x - 1$ имеет с графиком $y = |x^2 - 5x + 4|$ три общие точки: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Условие $x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$ выполняется на трех участках: $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_3$. Значения x_1 и x_3 находятся из уравнения

$$x - 1 = x^2 - 5x + 4.$$

Значение x_2 находится из уравнения

$$x - 1 = -(x^2 - 5x + 4).$$

Ответ. $x < 1$, $1 < x < 3$ и $x > 5$, т. е. все x , кроме $x = 1$ и $3 \leq x \leq 5$.

в) Напишите ответ для неравенств

$$x - 1 > |x^2 - 5x + 4|,$$

$$x - 1 \geq |x^2 - 5x + 4|.$$

50. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^2 - 5|x| + 4$$

на участке от -2 до 2 .

Задачи

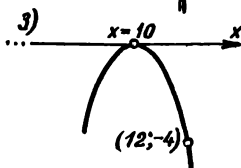
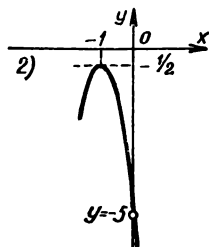
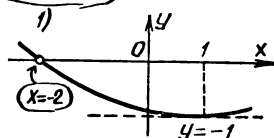
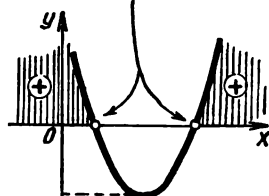


Рис. 59

$$x^2 - 5x + 4$$

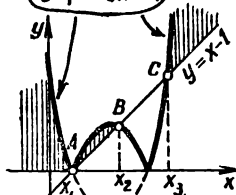
корни: $x_1 = 1, x_2 = 4$



Решение: $x < 1, x > 4$

Рис. 60

Задача
 $x-1 < |x^2-5x+4|$
 $y = |x^2-5x+4|$



Решение: $x < x_1$,
 $x_1 < x < x_2$,
 $x_3 < x$

Рис. 61

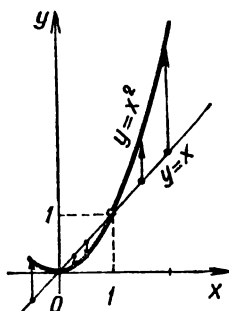


Рис. 62

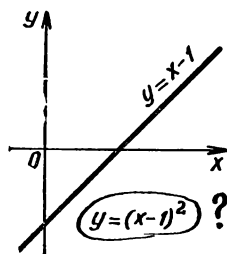


Рис. 63

6. График $y=x^2$ можно также нарисовать, «возведя в квадрат» график $y=x$, т. е. мысленно возведя в квадрат значение каждой ординаты (рис. 62).

Упражнения

51. Нарисован график (рис. 63) $y=x-1$. Нарисовать на этом же чертеже график $y=(x-1)^2$.

52. Нарисован график (рис. 64) $y=f(x)$. Нарисовать на том же чертеже график $y=(f(x))^2$.

53. Воспользовавшись графиком $y=x(x+1)(x-1)(x-2)$ из § 1, нарисовать график

$$y=x^2(x+1)^2(x-1)^2(x-2)^2.$$

54. Нарисовать графики:

а) $y=[x]^2$; б) $y=(x-[x])^2$.

§ 5. Дробно-линейная функция

1. На рисунке 65 изображен «график» функции $y=\frac{1}{x}$ в том виде, как его часто рисуют люди, не искусенные в построении графиков. Они рассуждают так: «При $x=1$ $y=1$. При $x=2$ $y=\frac{1}{2}$. При $x=3$ $y=\frac{1}{3}$. При $x=-1$ $y=-1$. При $x=0$, ...? Неясно ... Что значит $\frac{1}{0}$, неизвестно, поэтому $x=0$ пропустим ...»

Вы уже знаете из предыдущего текста, что так рисовать графики нельзя. Чтобы представить себе правильную картину, заметим сначала, что при $x=0$ функция не определена. В таких случаях интересно посмотреть, как ведет себя функция около

этой точки. Когда x , уменьшаясь по абсолютной величине, подходит к нулю, то y становится по абсолютной величине как угодно большим.

При этом если x приближается к нулю справа ($x > 0$), то y тоже положителен. Поэтому при приближении к нулю справа кривая графика поднимается вверх (рис. 66). Если же x приближается к нулю слева ($x < 0$), то y отрицателен, поэтому слева график спускается вниз (рис. 67).

Теперь ясно, что около «запрещенного» значения $x=0$ график, разорвавшись на две ветви, расходится вдоль оси Oy : правая ветвь идет вверх, а левая вниз (рис. 68).

Посмотрим теперь, как ведет себя функция, если x увеличивается по абсолютной величине. Сначала рассмотрим правую ветвь, т. е. значения $x > 0$. При положительном x значения функции y тоже положительны. Значит, вся правая ветвь расположена выше оси абсцисс. При увеличении x дробь $\frac{1}{x}$ уменьшается. Поэтому при движении от нуля вправо кривая $y = \frac{1}{x}$ опускается все ниже и ниже, причем она может подойти к оси Ox на как угодно маленькое расстояние. Для $x < 0$ получается аналогичная картина (рис. 69, а и б).

Таким образом, при неограниченном увеличении x по абсолютной величине функция $y = \frac{1}{x}$ неограниченно уменьшается по абсолютной величине, и обе

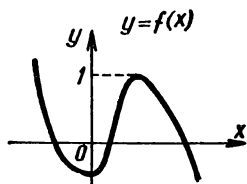


Рис. 64

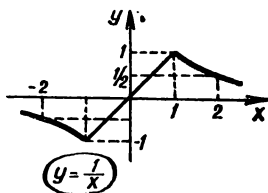


Рис. 65

$$x > 0, y = \frac{1}{x} > 0$$

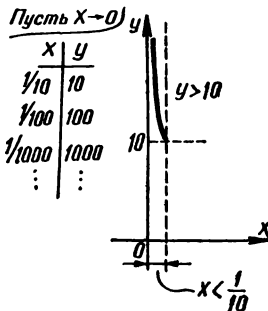


Рис. 66

Пусть $x \rightarrow 0$ при $x < 0$

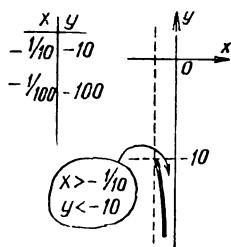


Рис. 67

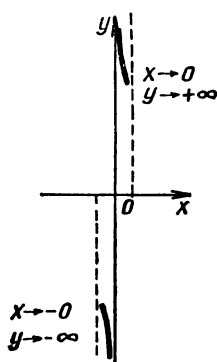


Рис. 68

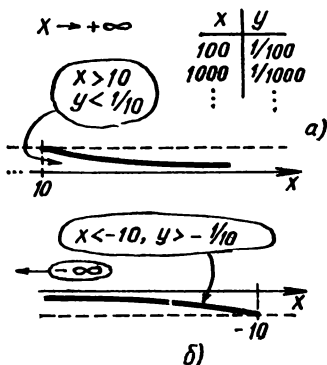


Рис. 69

ветви графика приближаются к оси абсцисс: правая сверху, левая снизу (рис. 70).

Кривая, являющаяся графиком $y = \frac{1}{x}$, называется *гиперболой*. Прямые, к которым приближаются ветви гиперболы, называются ее *асимптотами*.

2. Можно построить график $y = \frac{1}{x}$ несколько иначе.

Нарисуем график функции $y = x$ (рис. 71, а). Заменяем каждую ординату величиной, ей обратной, и отметим соответствующие точки на рисунке 71, б. Получим график $y = \frac{1}{x}$.

Нарисованная картина наглядно показывает, как маленькие ординаты первого графика превращаются в большие ординаты второго и, наоборот, большие ординаты первого в маленькие ординаты второго.

Этот прием «деления» графиков бывает полезен всегда, когда мы умеем строить график $y = f(x)$, а нам нужно

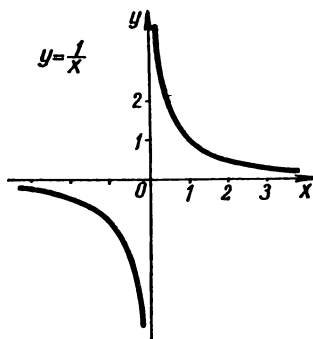


Рис. 70

построить график функции $y = \frac{1}{f(x)}$ (стр. 276, 277).

Упражнения

55. Зная график $y = x^2$, постройте график $y = \frac{1}{x^2}$. (Решение на рисунке 72.)

56. Постройте графики:

а) $y = \frac{1}{x^2 - 3x - 2}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$.

(Вы увидите, что эти два графика выглядят совершенно по-разному.)

57. Зная графики $y = [x]$ и $y = x - [x]$, постройте графики:

а) $y = \frac{1}{[x]}$; б) $y = \frac{1}{x - [x]}$.

3. Кривые, которые вы будете строить в следующих упражнениях, получаются из гиперболы $y = \frac{1}{x}$ известными вам преобразованиями. Все они тоже называются гиперболами.

Упражнения

58. Нарисуйте графики функций:

а) $y = \frac{1}{x} + 1$;

б) $y = \frac{1}{x+1}$;

в) $y = \frac{1}{x-2} + 1$.

Укажите, какие асимптоты имеет каждая из этих гипербол.

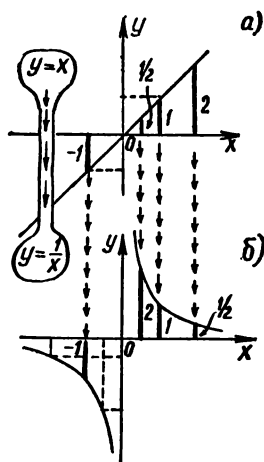


Рис. 71

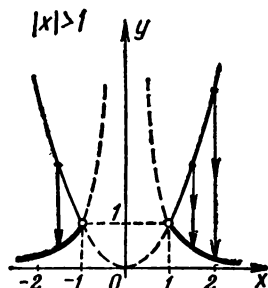
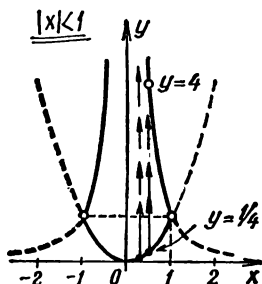
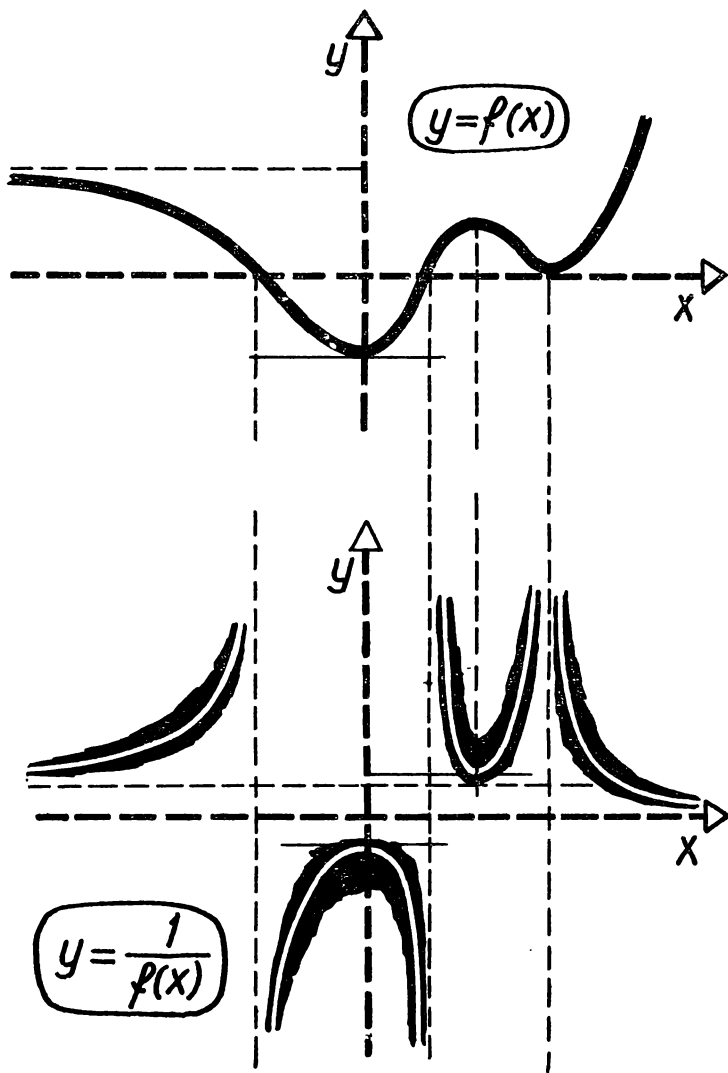
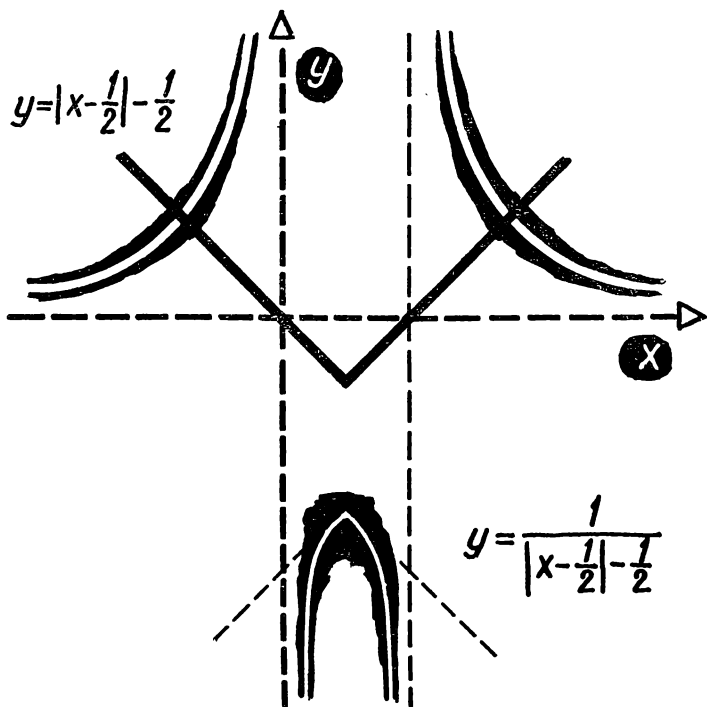


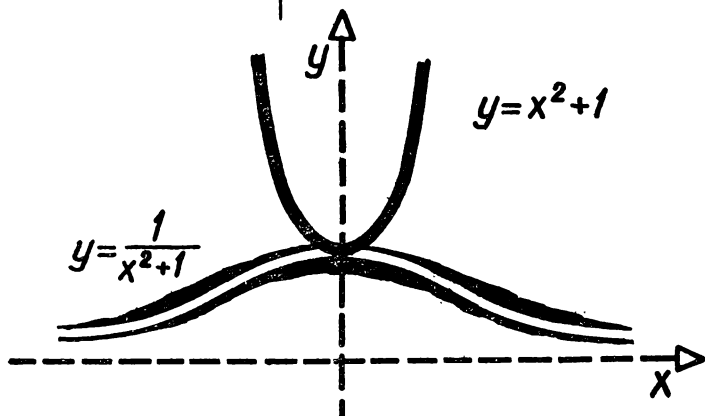
Рис. 72

$$y = f(x) \rightarrow y = \frac{1}{f(x)}$$





$$\underline{y = f(x)} \rightarrow y = \frac{1}{f(x)}$$



$$y = \frac{1}{3x+2} = \frac{\frac{1}{3}}{x + \frac{2}{3}}$$

← сжатие
← сдвиг

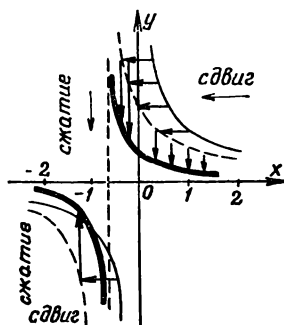


Рис. 73

59. а) Докажите, что прямые $y = x$ и $y = -x$ являются осями симметрии гиперболы $y = \frac{1}{x}$.

б) Имеет ли ось симметрии правая ветвь графика $y = \frac{1}{x^2}$?

60. Зная график $y = \frac{1}{x}$, постройте график $y = \frac{4}{x}$. Имеет ли эта кривая оси симметрии?

4. Графики функций вида $y = \frac{b}{cx+d}$ (где $c \neq 0$ и $d \neq 0$) получаются из графика $y = \frac{1}{x}$

сдвигом по оси Ox и растяжением по оси Oy . Чтобы правильно определить величину сдвига и коэффициент растяжения, нужно числитель и знаменатель дроби поделить на c — коэффициент при x :

$$\frac{b}{cx+d} = \frac{\frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}.$$

Прделаем это на примере $y = \frac{1}{3x+2}$.

Имеем:

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{\frac{1}{3}}{x + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + \frac{2}{3}}.$$

Теперь видно, что график функции $y = \frac{1}{3x+2}$ — это график $y = \frac{1}{x}$, сдвинутый по оси Ox на $-\frac{2}{3}$ ¹ и сжатый по оси Oy втрое (рис. 73).

¹ А не на (-2) , как часто необдуманно говорят ученики!

Упражнение

61. Нарисуйте график

$$y = \frac{1}{2-x} + 1.$$

У к а з а н и е. Дробь $\frac{1}{2-x}$ преобразуйте, как сказано выше: поделите числитель и знаменатель на коэффициент при x , т. е. на (-1) . Получится $y = \frac{-1}{x-2} + 1$.

Б. Графики функций вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

называемых дробно-линейными, по форме не отличаются от графика $y = \frac{1}{x}$. Мы предполагаем, конечно, что $c \neq 0$ (иначе получится линейная функция $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$) и что $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$, т. е. числитель не есть кратное знаменателя (как у функции $y = \frac{4x+6}{2x+3}$), иначе функция постоянна.

Докажем это. Рассмотрим сначала пример: $y = \frac{2x+1}{x-3}$. Выделим «целую часть» дроби, разделив числитель на знаменатель:

$$\frac{-2x+1}{2x-6} \left| \frac{x-3}{2} \right.; \quad y = 2 + \frac{7}{x-3},$$

мы получим:

$$\frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}.$$

Теперь видно, что график этой функции получается из графика $y = \frac{1}{x}$ следующими преобразованиями: сдвигом на 3 единицы вправо, растяжением в 7 раз вдоль оси Oy и сдвигом на 2 единицы вверх.

Любую дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ можно записать аналогичным образом, выделив ее «целую часть». Следовательно, графики

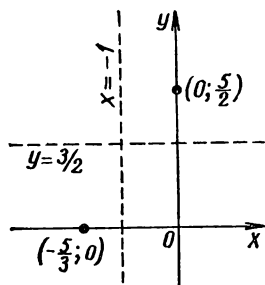


Рис. 74

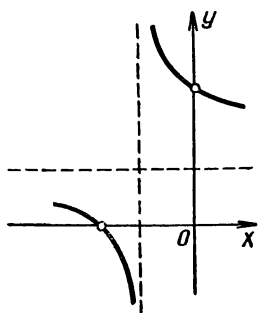


Рис. 75

всех дробно-линейных функций $\frac{ax+b}{cx+d}$ есть гиперболы (различным образом сдвинутые вдоль координатных осей и растянутые по оси Ox).

З а м е ч а н и е. Для построения графика какой-нибудь дробно-линейной функции не обязательно преобразовывать дробь, задающую эту функцию. Поскольку мы знаем, что график есть гипербола, достаточно найти прямые, к которым приближаются ее ветви (асимптоты гиперболы), и еще несколько точек.

П р и м е р. Построим график функции

$$y = \frac{3x+5}{2x+2}.$$

Найдем сначала асимптоты этой гиперболы. Функция не определена там, где $2x+2=0$, т. е. при $x=-1$ (рис. 74). Стало быть, вертикальной асимптотой служит прямая $x=-1$.

Чтобы найти горизонтальную асимптоту, посмотрим, к чему приближаются значения функции, когда аргумент возрастает по абсолютной величине. Для больших (по абсолютной величине) значений x

$$y = \frac{3x+5}{2x+2} \approx \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Стало быть, горизонтальная асимптота — прямая $y = \frac{3}{2}$.

Определим точки пересечения нашей гиперболы с осями координат. При $x=0$ имеем $y = \frac{5}{2}$. Функция равна нулю, когда $3x+5=0$, т. е. при $x = -\frac{5}{3}$.

Отметив на чертеже точки $(-\frac{5}{3}; 0)$ и $(0; \frac{5}{2})$, построим график (рис. 75).

Упражнения

62. Постройте графики функций:

а) $y = \frac{1}{1-2x}$; б) $y = \frac{3+x}{3-x}$;

в) $y = \left| \frac{2x+1}{x+1} \right|$.

63. На рисунке 76 а и б изображены графики дробно-линейных функций $y = \frac{px+q}{x+r}$. Найдите эти функции (т. е. определите p , q и r).

64. а) Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{x}{1-x} = x^2 + 4x + 2?$$

Решение. Построим на одном чертеже графики функций

$$y = \frac{x}{1-x} \text{ и } y = x^2 + 4x + 2.$$

На рисунке 77 видны две точки пересечения этих графиков. Ясно, что есть и третья точка, так как парабола пересекает асимптоту гиперболы. Абсциссы точек пересечения графиков и являются решениями уравнения.

Ответ. Три решения.

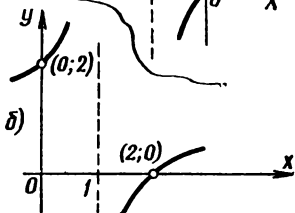
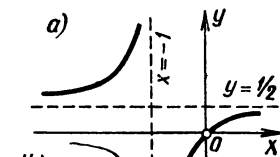


Рис. 76

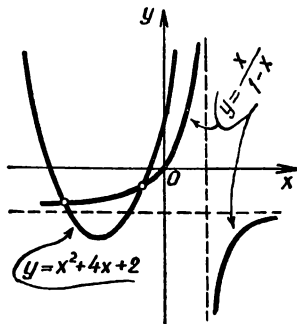


Рис. 77

§ 6. Графики рациональных функций

1. Рациональные функции — это функции, которые можно представить в виде частного двух многочленов.

Построим график функции

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}.$$

Обратим прежде всего внимание на то, что при $x = -1$ функция не определена (так как знаменатель дроби

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

Знаменатель = 0 при $x = -1$

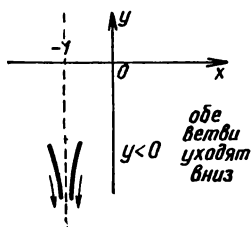


Рис. 78

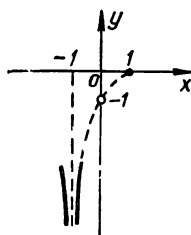


Рис. 79

$x^2 + 2x + 1$ при $x = -1$ равен нулю). При x , близких к -1 , числитель дроби $x - 1$ приблизительно равен -2 , а знаменатель $(x + 1)^2$ положителен и мал по абсолютной величине. Значит, вся дробь $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ будет отрицательна и велика по абсолютной величине (и тем больше, чем ближе к значению $x = -1$). Вывод: график распадается на две ветви (поскольку на нем нет точки с абсциссой, равной -1); обе ветви уходят вниз, когда x приближается к -1 (рис. 78).

Обратим внимание на числитель. Он обращается в нуль при $x = 1$. Значит, в точке $x = 1$ график пересекает ось абсцисс. Нарисовав еще точку пересечения с осью Oy (при $x = 0$, $y = -1$), мы можем примерно представить себе ход графика в средней его части (рис. 79).

Остается посмотреть, что делается с функцией при больших по абсолютной величине значениях x .

Если x положительно и увеличивается, то числитель и знаменатель дроби увеличиваются. Но так как в числителе стоит x в первой степени, а в знаменателе есть член x^2 , то знаменатель при больших x увеличивается гораздо

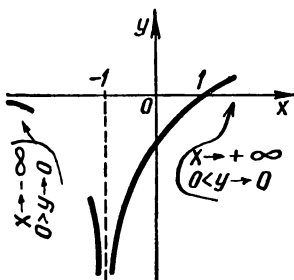


Рис. 80

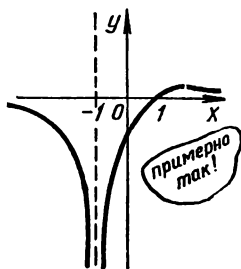


Рис. 81

быстрее, чем числитель. Поэтому при неограниченном увеличении x функция $y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$ будет все больше и больше приближаться к нулю. Таким образом, правая ветвь графика правее точки $x=1$ немного поднимается над осью абсцисс (рис. 80), а потом опять начнет опускаться и будет приближаться к оси Ox .

Аналогичные соображения покажут нам, что левая ветвь кривой при увеличении x по абсолютной величине тоже приближается к оси абсцисс, только не сверху, а снизу. Позже мы покажем (см. стр. 287), как можно точно найти место наивысшего подъема правой ветви графика.

По отмеченным деталям можно найти общий вид графика (рис. 81).

2. Построим график функции

$$y = \frac{x}{x^2+1}.$$

Для удобства начертим сначала графики числителя $y=x$ и знаменателя $y=x^2+1$ (рис. 82). Для построения графика нашей функции нужно значения числителя делить на значения знаменателя.

При $x=0$ числитель равен нулю — график проходит через начало координат. Пойдем теперь направо (т. е. рассмотрим положительные значения аргумента). Так как величина x^2 много меньше x при очень маленьких x , то при выходе из начала координат знаменатель будет некоторое время почти равен единице (немного больше, чем единица); поэтому функция будет примерно равна числителю (чуть-чуть меньше числителя) — график пойдет рядом с прямой $y=x$, постепенно от нее отставая (рис. 83).

Вскоре, однако, x^2+1 начинает расти быстрее, чем x , знаменатель обгоняет числитель, и дробь начинает уменьшаться — график пойдет вниз (рис. 84).

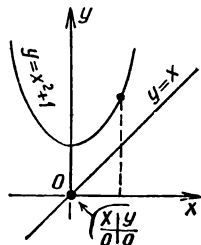


Рис. 82

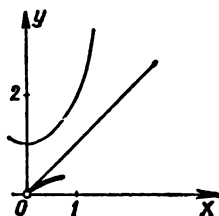


Рис. 83

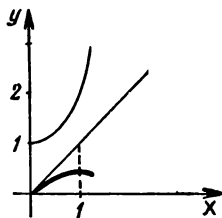


Рис. 84

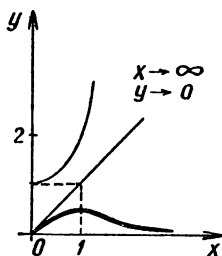


Рис. 85

Так как в числителе стоит x в первой степени, а в знаменателе есть член, содержащий x^2 , то при больших x знаменатель растет быстрее числителя. Поэтому дробь с увеличением x становится все меньше — график приближается к оси абсцисс (рис. 85).

Левую половину графика можно получить аналогичным образом. Общий вид графика показан на рисунке 86.

3. Левую половину графика $y = \frac{x}{x^2+1}$ можно получить из правой его половины с помощью симметрии, правда другого рода, чем те, которые мы рассматривали выше. Возьмем какую-нибудь точку M на правой половине графика. Если a — абсцисса этой точки, то ее ордината b равна $\frac{a}{a^2+1}$. Найдем теперь точку графика, соответствующую противоположному значению абсциссы, $x = -a$. Ордината такой точки равна $\frac{-a}{(-a)^2+1}$, т. е. $-\frac{a}{a^2+1}$, или $-b$. Итак, для каждой точки $M(a; b)$ на правой половине графика $y = \frac{x}{x^2+1}$ на левой его половине найдется точка $M'(-a; -b)$. Очевидно (рис. 87), точка M' симметрична точке M относительно начала координат. Значит, всю левую половину графика можно получить из правой симметричным отражением относительно начала координат.

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

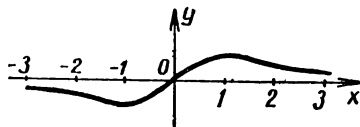
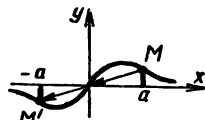


Рис. 86

$$f(-a) = \frac{-a}{(-a)^2+1} = -f(a)$$



Отражение относительно начала координат

Рис. 87

Упражнения

65. Докажите, что график функции $y = \frac{1}{x^3}$ симметричен относительно начала координат.

Решение. Рассмотрим две точки кривой $y = \frac{1}{x^3}$ с абсциссами a и $-a$. Ордината первой равна $\frac{1}{a^3}$, ордината второй $\frac{1}{(-a)^3} = -\frac{1}{a^3}$.

Значит, для каждой точки $M\left(a; \frac{1}{a^3}\right)$ нашей кривой найдется точка $M'\left(-a; -\frac{1}{a^3}\right)$, симметричная первой относительно начала координат. Следовательно, вся кривая $y = \frac{1}{x^3}$ симметрична относительно начала координат.

66. Какие из следующих функций являются четными и какие нечетными¹:

$$y = x^3 |x|; \quad y = |x^3| + x; \quad y = \frac{x}{|x|};$$

$$y = |x - x^2|; \quad y = (2x + 1)^4 + (2x - 1)^4;$$

$$y = \frac{1}{|2x - x^2|} - \frac{1}{|2x + x^2|}; \quad y = (x^3 + 1)^2; \quad y = (x^2 + 1)^3;$$

$$y = \frac{1}{|2x - x^2|}; \quad y = (3 - x)^5 - (3 + x)^5$$

4. Вернемся снова к построенному нами графику функции

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

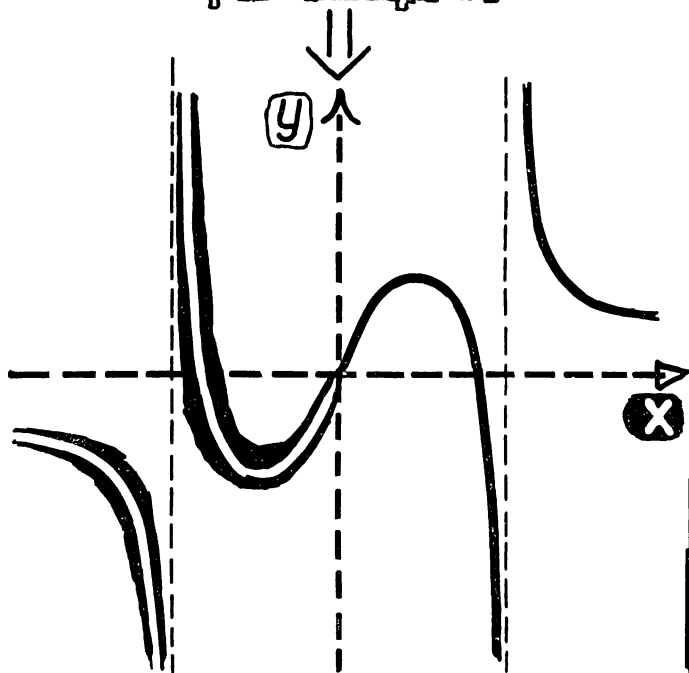
и разберем на этом примере еще один интересный вопрос. Попробуем точно найти самую высокую точку правой половины графика (а значит, конечно, и самую низкую точку левой половины).

Очевидно, что наша кривая не может подняться очень высоко, так как знаменатель $x^2 + 1$ довольно быстро начинает обгонять числитель x . Посмотрим, может ли она подняться на высоту, равную 1, т. е. может ли при каком-нибудь x значении y быть равным 1.

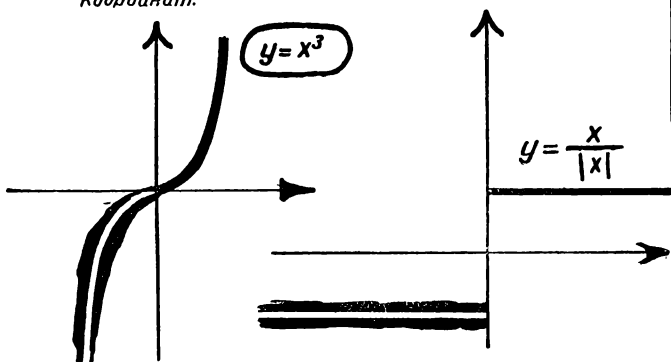
¹ Определение четной функции — на стр. 236, определение нечетной — на стр. 286.

НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

$$f(-a) = -f(a)$$



функция $y=f(x)$ называется нечетной, если при всяком a выполняется равенство $f(-a)=-f(a)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



Так как $y = \frac{x}{x^2+1}$, то для этого нужно решить уравнение $\frac{x}{x^2+1} = 1$, или $x^2 - x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет корней. (Проверьте!) Значит, на графике нет точек с ординатой 1 — график не пересекает прямой $y = 1$ (рис. 88).

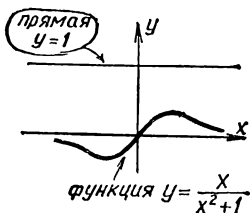


Рис. 88

Посмотрим, поднимается ли кривая на высоту, равную $\frac{1}{3}$. Для этого нужно, чтобы было $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$, или $x^2 - 3x + 1 = 0$. Это уравнение имеет два корня (проверьте!), и, значит, наш график имеет две точки с ординатами, равными $\frac{1}{3}$, т. е. пересекает прямую $y = \frac{1}{3}$ в двух точках (рис. 89).

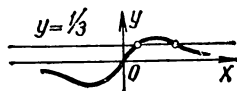


Рис. 89

Чтобы найти самую высокую точку, надо узнать, при каком самом большом h уравнение $\frac{x}{x^2+1} = h$ будет иметь решение (рис. 90).

Уравнение $\frac{x}{x^2+1} = h$ заменим квадратным:

$$hx^2 - x + h = 0.$$

Это уравнение имеет решение, когда $1 - 4h^2 \geq 0$.

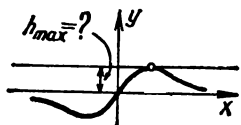


Рис. 90

Отсюда находим самую большую высоту, на которую может подняться наш график: $h = \frac{1}{2}$.

Найдем, при каком x это самое большое значение y достигается. Так как $y = \frac{x}{x^2+1}$, то $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, $x^2 - 2x + 1 = 0^1$, откуда $x = 1$.

Итак, самая высокая точка графика — это точка $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

¹ Случайно ли получился полный квадрат?

$$y = \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{x^2+1}}$$

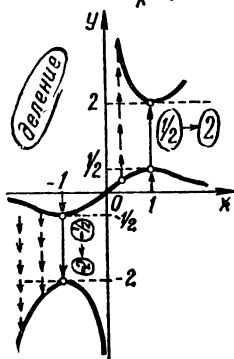


Рис. 91

$$y = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

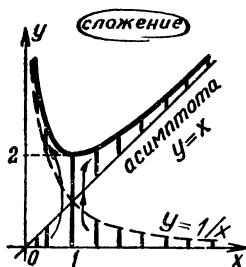


Рис. 92

Упражнение

Найдите самую большую ординату графика $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ (см. п. 1).

5. Построим график функции

$$y = \frac{x^2+1}{x}.$$

Общий вид его легко нарисовать, если заметить, что

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{\frac{x}{x^2+1}},$$

и, следовательно, мы пришли к задаче, которую уже решали: зная график $y = f(x)$, построить график $y = \frac{1}{f(x)}$.

Получаем примерно такую картину (рис. 91).

Построим этот график другим способом. При этом выяснится еще одна его интересная особенность.

Поделим числитель на знаменатель:

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Теперь построим график $y = x + \frac{1}{x}$ «сложением» известных нам графиков $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ (рис. 92).

Мы видели, что график $y = \frac{x^2+1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту — ось Oy , к которой график приближается, когда x уменьшается по абсолютной величине. Теперь видно что этот график имеет еще наклонную асимптоту — прямую $y = x$ (к этой прямой он приближается, когда x неограниченно возрастает).

Упражнения

67. Проверьте, что график $y = \frac{x^2+1}{x}$ симметричен относительно начала координат.

68. Найдите координаты самой низкой точки правой ветви графика

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Ответ на упражнение 68 ясен из первого способа построения этого графика (рис. 91): самая низкая точка графика $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ получается при том x , при котором на графике $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ получается самая высокая, т. е. при $x = 1$. Наименьшее значение ординаты графика $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ равно, таким образом, 2.

Мы получили интересное неравенство: для положительных x (речь шла о правой части графика) всегда

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Задачи

69. Докажите неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (1)$$

непосредственно.

70. Докажите неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a > 0, b < 0). \quad (2)$$

Оно выражает такой факт: «среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического».

Неравенство (1) есть частный случай неравенства (2). При каких a и b ?

71. Неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$ используется при решении известной задачи о «честном купце». Один честный купец знал, что весы, на которых он взвешивает товар, неточны, потому что одно коромысло немного длиннее другого (в то время еще пользовались весами с двумя чашками, рис. 93). Что делать? Обвешивать покупателей — грех, но и себя обижать не хочется. Купец решил, что

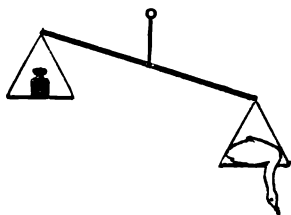


Рис. 93

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

разрывы в точках
 $x = -1$
 $x = +1$

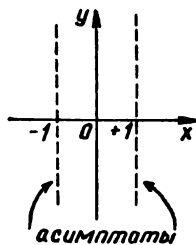


Рис. 94

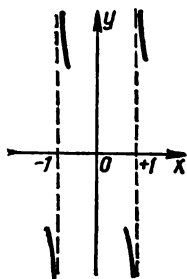


Рис. 95

половину товара каждому покупателю он будет взвешивать на одной чашке, а вторую половину — на другой чашке.

Спрашивается, что при этом получится: оказался ли он в выигрыше или в проигрыше?

6. В следующем примере возьмем функцию

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Она уже представлена в виде суммы двух функций, и, конечно, можно строить ее график сложением графиков

$y = \frac{1}{x+1}$ и $y = \frac{1}{x-1}$. Но здесь, пожалуй, можно и сразу представить себе общий вид графика из таких соображений:

а) функция не определена при $x = -1$ и $x = 1$, значит, кривая распадается на три ветви (рис. 94);

б) при приближении к $x = 1$ второе слагаемое, а значит, и вся функция растет по абсолютной величине — значит, ветви графика удаляются от оси абсцисс, приближаясь к прямой $x = 1$. При этом справа от $x = 1$ кривая идет вверх, а слева — вниз (рис. 95). Почему?

Аналогичная картина получается около прямой $x = -1$;

в) $y = 0$ при $x = 0$; кривая проходит через начало координат (рис. 96);

г) для больших по абсолютной величине чисел оба слагаемых малы по абсолютной величине — обе крайние

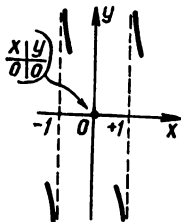


Рис. 96

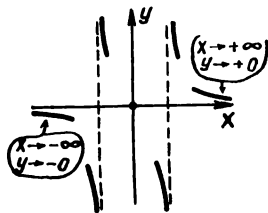


Рис. 97

ветви графика приближаются к оси абсцисс: правая сверху, а левая снизу (рис. 97).

Объединив все эти сведения, получим общий вид графика (рис. 98). Покажите, что этот график симметричен относительно начала координат.

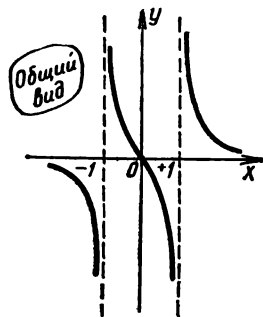


Рис. 98

7. Разобранные примеры показывают, что даже при построении одного и того же графика можно пользоваться различными приемами. Поэтому сейчас мы дадим еще несколько примеров на построение графиков и попросим вас подобрать подходящие приемы для их построения.

Упражнения

72. Постройте график

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

На сколько кусков распадается кривая?

73. а) Постройте график

$$y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

б) Постройте график $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$.

Укажите ось симметрии этой кривой.

74. Постройте графики:

а) $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)};$

б) $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)}.$

У к а з а н и е. Постройте сначала график $y = (x-1)(x-2)(x+1)$, см. § 2, п. 4. Впрочем, можно и непосредственно рассмотреть поведение функции около точек $x=1$, $x=2$, $x=-1$ и при x , больших по абсолютной величине;

в) $y = x + \frac{1}{x^2}.$

§ 7. Разные задачи

75. Постройте графики функций:

а) $y = x(1 - x) - 2$;

б) $y = x(1 - x)(x - 2)$;

в) $y = \frac{4 - x}{x^3 - 4x}$;

г) $y = \frac{2|x| - 3}{3|x| - 2}$;

д) $y = \frac{1}{4x^2 - 8x - 5}$;

е) $y = \frac{1}{x^3 - 5x}$;

ж) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$;

з) $y = (2x^2 + x - 1)^2$;

и) $y = |x| + \frac{1}{1 + x^2}$;

к) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x - 1}$;

л) $y = \frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 + x - 2}$;

м) $y = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x + 3}$;

н) $y = (x - 3)|x + 1|$;

о) $y = |x - 2| + 2|x| + |x + 2|$;

п) $y = \left[\frac{1}{x} \right]$;

р) $y = \frac{|x + 1| - x}{|x - 2| + 3}$;

с) $y = \frac{x}{[x]}$;

т) постройте графики дробно-линейных функций вида

$$y = \frac{3x + a}{2x + 2}$$

для различных значений a .

76. Функция $y = f(x)$ определена следующим правилом:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Эта функция часто встречается, и потому для нее есть специальное обозначение

$$y = \operatorname{sign} x$$

(читается: «сигнум икс» — по-латыни signum — знак).

График этой функции изображен на рисунке 99. Функцию $y = \operatorname{sign} x$ можно для $x \neq 0$ задать формулой

$$y = \frac{x}{|x|}.$$

Нарисуйте графики функций:

$$y = (\operatorname{sign} x)^2; \quad y = (x - 1) \operatorname{sign} x;$$

$$y = x^2 \operatorname{sign} x.$$

77. Общий вид графика функции, являющейся частным от деления одного квадратного трехчлена на другой:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q},$$

зависит от того, сколько корней и какие корни будут иметь числитель и знаменатель.

а) Постройте графики функций:

$$y = \frac{4x^2 - 8x + 3}{x - x^2}; \quad y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}; \quad y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}.$$

б) Какой вид имеет график функции

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q},$$

если оба корня числителя больше корней знаменателя?

в) Разберите все возможные случаи и нарисуйте возможные типы графиков функций вида

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}.$$

Постарайтесь не пропустить ни одного случая и приведите по примеру на каждый тип.

78. Постройте график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

а) Докажите, что он не может пройти ни через одну точку, координаты которой — целые числа, кроме точки $(0; 0)$.

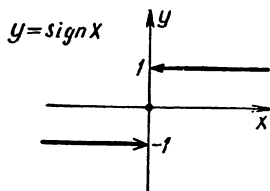


Рис. 99

Если вы возьмете за единицу масштаба одну клеточку, то такими «целочисленными» точками будут вершины клеток. Возьмите начало координат поближе к левому нижнему углу тетради и проведите аккуратно прямую $y = \sqrt{3}x$. (Под каким углом к оси Ox ее надо провести?) Некоторые из целочисленных точек окажутся очень близко от этой прямой. Пользуясь этим, найдите приближенные значения для $\sqrt{3}$ в виде обыкновенных дробей. Сравните полученные значения с табличным: $\sqrt{3} \approx 1,7321$.

б) Трудная задача: докажите, что найдется целочисленная точка, отстоящая от прямой $y = \sqrt{3}x$ на расстоянии, меньшем, чем $\frac{1}{1000}$.

При решении задач 79—83 используйте графики подходящим образом подобранных функций.

79. Сколько решений имеют уравнения:

а) $-x^2 + x - 1 = |x|$;

б) $|3x^2 + 12x + 9| + x = 0$;

в) $\frac{1}{x^2 - x + 1} = x$;

г) $|x - 1| + |x - 2| + |x + 1| + |x + 2| = 6$;

д) $(x + 1)(x + 2)x = 0,01$;

е) $|x + 3| = |x + 2|(x^2 - 1)$;

ж) $[x] = x$ на участке $|x| < 3$;

з) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 100$?

80. Решите уравнения:

а) $2x^2 - x - 1 = |x|$;

б) $|2x^2 - x - 1| - x = 0$;

в) $|x| = |x - 1| + |x - 2|$.

81. а) Определите, сколько решений может иметь уравнение

$$|1 - |x|| = a$$

при различных значениях a .

¹ Число $\frac{1}{1000}$ можно заменить любым другим числом. Тогда будет доказано, что, какое бы малое число ни взять, найдется точка с целыми координатами, отстоящая от прямой $y = \sqrt{3}x$ на расстояние, меньшее этого числа.

б) Тот же вопрос для уравнения

$$x^2 + \frac{1}{x} = a^1.$$

82. Решите неравенства:

а) $\frac{2-x}{x^3+6x+5} > 0$;

б) $x \leq |x^2 - x|$;

в) $|x| + 2|x+1| > 3$.

83. Найдите наибольшее значение функции и определите, при каких значениях x оно достигается

а) $y = x(a-x)$;

б) $y = |x|(a-|x|)$;

в) $y = x^2(a-x^2)$;

г) $y = \frac{x^2+4}{x^2+x+1}$;

д) $y = 1 - \sqrt{2}x$ на участке $|x| \leq \sqrt{2}$;

е) $y = -x^2 + 2x - 2$ на участке $-5 \leq x \leq 0$;

ж) $y = \frac{x+3}{x-1}$ на участке $x \geq 2$.

84. Две дороги пересекаются под прямым углом. По направлению к перекрестку движутся две автомашины: по первой дороге — со скоростью 60 км/ч, по второй — со скоростью 80 км/ч. В 12 часов обе машины находились за 10 км от перекрестка.

В какой момент расстояние между машинами будет наименьшим? Где будут находиться машины в этот момент?

85. Среди всех прямоугольных треугольников с данным периметром p найдите треугольник, имеющий наибольшую площадь.

86. Пусть $y = f(x)$ — четная функция, а $y = g(x)$ — нечетная функция. Что можно сказать о четности или нечетности функций:

$$y = f(x) + g(x); \quad y = f(x) \cdot g(x);$$

$$y = |g(x)|; \quad y = f(x) - g(x);$$

$$y = f(|x|) - g(x); \quad y = f(x) - g(|x|)?$$

¹ Значение a , разделяющее разные случаи, найдите приближенно по графику.

87. Найдите все четные и все нечетные функции вида:

а) $y = kx + b$; б) $y = \frac{px+q}{x+r}$; в) $y = \frac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$.

88. Функция $y = x^4 - x$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Однако эта функция представлена в виде суммы четной функции $y = x^4$ и нечетной функции $y = -x$.

а) Представьте функцию $y = \frac{1}{x^4 - x}$ в виде суммы четной и нечетной функций.

б) Докажите, что любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

89. Через каждые две точки с разными абсциссами проходит прямая — график линейной функции $y = kx + b$. Аналогично через каждые три точки с разными абсциссами, не лежащими на одной прямой, можно провести параболу — график функции $y = ax^2 + bx + c$.

Найдите коэффициенты квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, график которого проходит через точки:

а) $(-1; 0)$; $(0; 2)$; $(1; 0)$;

б) $(1; 0)$; $(4; 0)$; $(5; 6)$;

в) $(-6; 7)$; $(-4; -1)$; $(-2; 7)$;

г) $(0; -4)$; $(1; -3)$; $(2; -1)$;

д) $(-1; 9)$; $(3; 1)$; $(6; 16)$.

90. а) Совершите подобное преобразование параболы $y = x^2$, выбрав центр подобия в начале координат и коэффициент подобия, равный 2. Какая кривая получится?

б) Какое подобное преобразование переводит кривую $y = x^2$ в кривую $y = 5x^2$?

91. Докажите, что все параболы $y = ax^2 + bx + c$ геометрически подобны.

92. Докажите, что точка $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ есть фокус, а прямая $y = -\frac{1}{4}$ — директриса параболы $y = x^2$, т. е. что любая точка этой параболы равноудалена от этой точки $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ и этой прямой $y = -\frac{1}{4}$.

У к а з а н и е. Возьмите на параболе некоторую точку M с координатами $(a; a^2)$. Запишите расстояние от этой точки до точки $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ по формуле расстояния между двумя точками.

Запишите затем расстояние от точки $M(a; a^2)$ до прямой $y = -\frac{1}{4}$.

Докажите равенство полученных выражений.

93. На страницах 298 и 299 даны 17 графиков и столько же формул. Ваша задача: определить, какая формула относится к какому графику. Среди этих графиков вы найдете ответы к некоторым упражнениям.

94. На рисунке 100 изображен график функции $y = f(x)$.

Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

а) $y = f(x) - 2$; б) $y = f(x + 2)$;

в) $y = |f(x)|$; г) $y = f(|x|)$;

д) $y = -3f(x)$; е) $y = \frac{1}{f(x)}$;

ж) $y = (f(x))^2$; з) $y = f(-x)$;

и) $y = x + f(x)$; к) $y = \frac{f(x)}{x}$.

95. На плоскости нарисован квадрат со стороной a (рис. 101). Кривая L_S есть геометрическое место точек, наименьшее расстояние которых до какой-нибудь точки квадрата равно S . Обозначим площадь фигуры, ограниченной кривой L_S , через $P(S)$.

а) Найдите $P(S)$ как функцию S .

б) Решите задачу, аналогичную задаче 95, а, взяв вместо квадрата прямоугольник со сторонами a и b .

в) Та же задача для треугольника со сторонами a , b и c .

г) Та же задача для круга радиуса r .

96. Не можете ли вы заметить закономерность в получающихся выражениях для $P(S)$? Напишите общую формулу для любой выпуклой

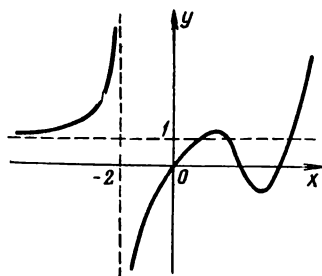


Рис. 100

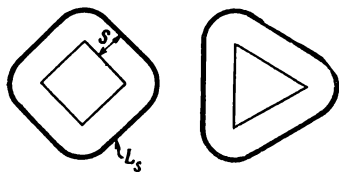
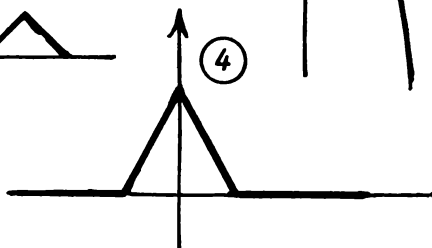
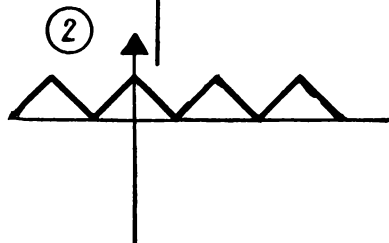
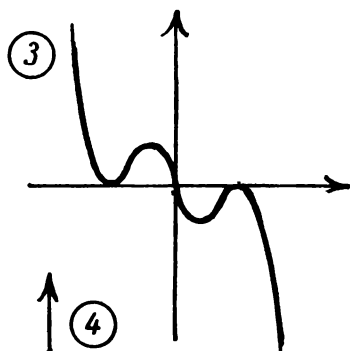
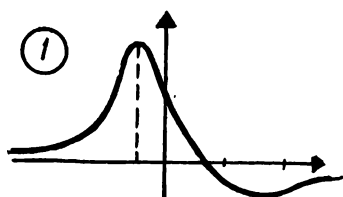
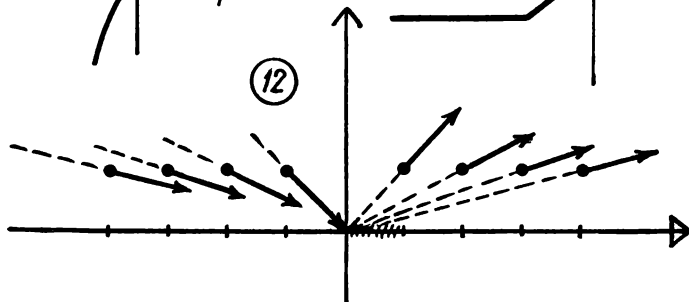
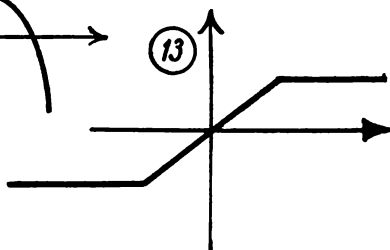
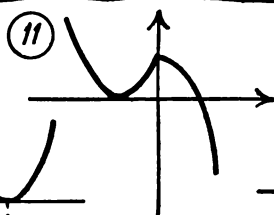
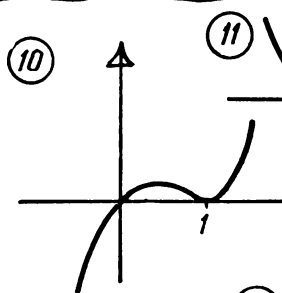
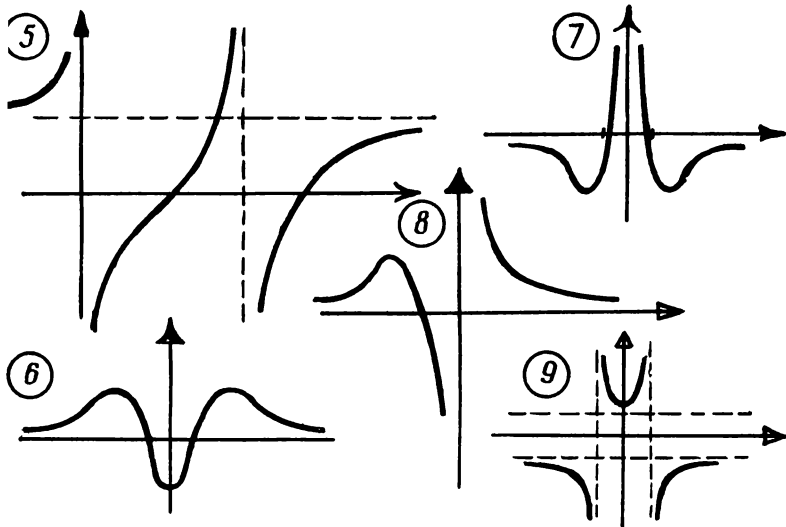


Рис. 101



$a) \left| \frac{x}{x+1} \right|;$
 $\delta) \frac{2-x}{x-1};$
 $\theta) \frac{x^2+1}{1-x^2};$
 $\vartheta) \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x};$
 $\partial) -\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x^2+x^4};$
 $e) -\frac{1-x^2}{1+x^4};$
 $\kappa) \frac{3-4x}{x^2+1};$
 $3) |1-|x||-|x|+1;$
 $u) \frac{x+1}{x^3};$

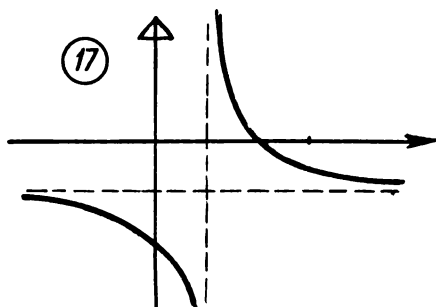
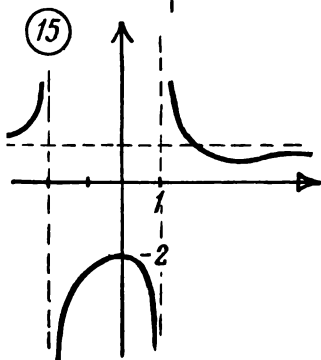
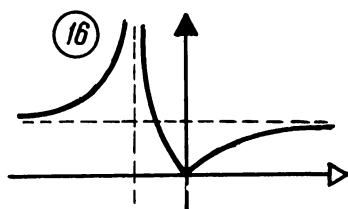
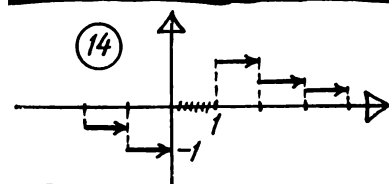




к) $-x^5 + 2x^3 - x$; и) $|x - [x] - \frac{1}{2}|$; н) $x^3 - 2x^2 + x$;

п) $(1+x)(1-|x|)$;

м) $\frac{1}{2}|x+1| - \frac{1}{2}|x-1|$; о) $\frac{1}{[x]}$ п) $\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x - 2}$; с) $\frac{x}{[x]}$;



$$\begin{aligned}
 &19 + 9 + 26 + 8 + \\
 &+ 18 + 11 + 14 = 105 \\
 &105 : 7 = 15 \\
 &9 + x - (x - 6) = 15 \\
 &26 + (x - 6) = 20 + x \\
 &20 + x - (x + 5) = 15
 \end{aligned}$$

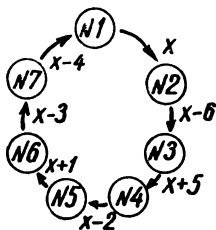


Рис. 102

$$\begin{aligned}
 S = &|x+5| + |x+1| + \\
 &+ |x| + |x-2| + \\
 &+ |x-3| + |x-4| + \\
 &+ |x-6|
 \end{aligned}$$

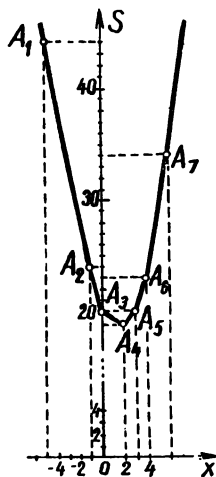


Рис. 103

фигуры. Верна ли эта формула для невыпуклых фигур?

97. Решим задачу 29. Всего спичек $19 + 9 + 26 + 8 + 18 + 11 + 14 = 105$. Поэтому нам нужно добиться, чтобы в каждой коробке было $105 : 7 = 15$ спичек.

Обозначим буквой x число спичек, которые нужно переложить из первой коробки во вторую. (Может быть, конечно, спички придется перекладывать из второй коробки в первую, тогда x будет отрицательным.) После того как мы переложим x спичек из первой коробки во вторую, во второй коробке будет $x + 9$ спичек.

Значит, из второй коробки в третью нужно переложить $x - 6$ спичек, из третьей в четвертую $x + 5$ спичек. Аналогично из четвертой коробки в пятую перекладывается $x - 2$, из пятой в шестую $x + 1$, из шестой в седьмую $x - 3$, наконец, из седьмой в первую $x - 4$ спичек (рис. 102).

Обозначим теперь через S общее число переложженных спичек:

$$\begin{aligned}
 S = &|x| + |x - 6| + |x + 5| + |x - 2| + \\
 &+ |x + 1| + |x - 3| + |x - 4|.
 \end{aligned}$$

В этой формуле знаки абсолютной величины использованы потому, что нам важно лишь число переложженных спичек, а не то, в каком направлении их перекладывали.

Нам теперь нужно выбрать x так, чтобы S имело наименьшую величину. Здесь нам может помочь график функции $S = f(x)$ (рис. 103).

Самая низкая точка графика есть вершина A_4 , значит, функция $S = f(x)$ принимает свое наименьшее

Ответ:

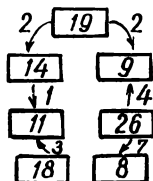


Рис. 104

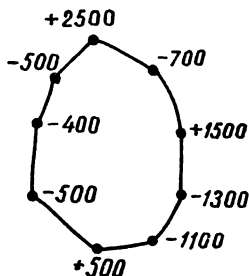


Рис. 105

значение при $x=2$. Таким образом, x найден и мы можем сказать, сколько и куда спичек нужно перекладывать (рис. 104). Этим способом задачу можно решить, конечно, и для произвольного числа (n) коробок. Для этого нужно, так же как в нашем примере, написать выражение для S . Оно будет иметь вид:

$$S = |x| + |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{n-1}|.$$

Для того чтобы найти нужное значение x в случае нечетного числа n , можно воспользоваться следующим простым правилом: числа $0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ нужно выписать в возрастающем порядке. После этого x выбирается равным числу, стоящему ровно в середине этой последовательности чисел (если n нечетно, такое число всегда найдется). Подумайте, как выглядит график в случае четного n .

Попробуйте затем сформулировать правило для нахождения x в этом случае.

С этой похожей на игру задачей связана практически важная задача о перевозках по кольцевым маршрутам. Представьте себе кольцевую железную дорогу с равностоящими станциями. На некоторых станциях находятся склады угля, на других — потребители, которым нужно доставить весь этот уголь.

На рисунке 105 указаны запасы угля на складах и (со знаком —) потребность в нем.

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, составьте наиболее экономный план перевозок.

4. б) Ответ ищите среди графиков на стр. 298 и 299.

20. б) Ответ ищите среди графиков на стр. 298 и 299.

25. У к а з а н и е. Эта функция принимает наименьшее значение на целом отрезке.

29. Решение см. в задаче 97.

59. б) Нет, не имеет. Строгое доказательство этого факта не очень просто, и мы его здесь не приводим. Однако ясно, что так как и ось Ox и ось Oy являются асимптотами этой кривой, то осью симметрии могла бы быть только прямая $y=x$. То, что эта прямая не является осью симметрии, легко проверяется.

75. л) и с) Ответ ищите среди графиков на стр. 298 и 299.

77. б) Возьмем числовой пример. Пусть корни числителя будут -5 и 0 , а корни знаменателя $+2$ и $+4$. Тогда наша функция имеет вид $y = \frac{ax(x+5)}{(x-2)(x-4)}$. Выберем какое-нибудь конкретное значение a , например $a=2$.

Функция $y = \frac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)}$ не определена при $x=2$ и $x=4$. При приближении x к этим значениям знаменатель уменьшается, приближаясь к нулю; значит, функция неограниченно растет по абсолютной величине — прямые $x=2$ и $x=4$ являются вертикальными асимптотами графика.

Функция равна нулю при $x=0$ и $x=-5$. Отметим на оси Ox две точки графика: $(0; 0)$ и $(-5; 0)$.

Четыре «особых» значения аргумента: $x=-5, 0, 2, 4$ делят ось Ox на 5 участков. При переходе через границу любого участка функция меняет знак, обращаясь в нуль или «уходя в бесконечность» (рис. 106).

Осталось выяснить поведение функции, когда аргумент неограниченно растет по абсолютной величине. Попробуем вместо x подставлять большие числа (например, $x=10\,000$, $x=1\,000\,000$ и т. д.). Так как $2x^2$ будет гораздо больше, чем $10x$, а x^2 гораздо больше, чем $-6x+8$, то дробь

$$\frac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)} = \frac{2x^2+10x}{x^2-6x+8}$$

будет примерно равна отношению старших членов числителя и знаменателя

$$y = \frac{2x^2+10x}{x^2-6x+8} \approx \frac{2x^2}{x^2} = 2,$$

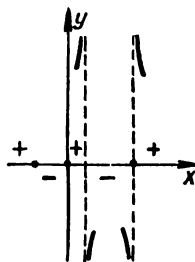


Рис. 106

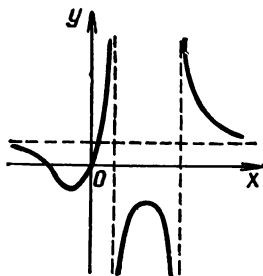


Рис. 107

причем тем ближе к 2, чем больше x . Значит, при удалении от начала координат график будет приближаться к горизонтальной прямой $y = 2$.

Общий вид графика — на рисунке 107. Во всех случаях, когда оба корня знаменателя больше корней числителя, график будет примерно такой.

88. Сначала решим задачу б), а решение а) получим как частный случай.

Предположим, что $f(x)$ представлена в виде суммы четной функции $g(x)$ и нечетной $h(x)$:

$$f(x) = g(x) + h(x). \quad (1)$$

Так как это равенство верно для всех значений x , то в него можно подставить $-x$ вместо x , и мы получим

$$f(-x) = g(-x) + h(-x), \quad (2)$$

где $g(-x) = g(x)$ и $h(-x) = -h(x)$. Пользуясь этим, мы сначала сложим (1) и (2), а затем вычтем одно из другого; найдем:

$$f(-x) + f(x) = 2g(x) \text{ и } f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Отсюда находятся функции $g(x)$ и $h(x)$ и получается искомое разложение функции $f(x)$ на сумму четной и нечетной функции:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (3)$$

Решение задачи а) по формуле (3):

$$\frac{1}{x^4 - x} = \frac{x^2}{x^6 - 1} + \frac{1}{x^7 - x}.$$

Последняя тема факультативного курса «Дополнительные главы математики» в VIII классе посвящена ознакомлению учащихся с простейшими номограммами. При правильной постановке занятий эта тема вызывает у учащихся повышенный интерес к данному разделу математики. Для этого весьма полезно показать на занятиях отдельные примеры номограмм, применяемых на производстве. Не следует при этом стремиться охватить на занятиях как можно больше различного вида номограмм. Программа ориентирует нас на сравнительно небольшой материал, относящийся к номограммам с выравненными точками с тремя параллельными шкалами или с двумя параллельными прямолинейными и одной криволинейной шкалой. Этим и следует ограничиться.

В данном пособии дается такой минимальный материал к данной теме. При этом осуществляется постепенный переход от наиболее простых номограмм к более сложным, чтобы по данному образцу ученики смогли бы сами построить такого же рода номограммы, но с другими числовыми данными. Для построения номограмм с логарифмическими шкалами используются шкалы логарифмической линейки и свойства этих шкал, известные учащимся из общего курса.

На основе имеющегося у авторов опыта данная тема может быть спланирована следующим образом:

1. Введение. Примеры номограмм	1 час
2. Номограммы с равномерными параллельными шкалами	2 часа
3. Номограммы с неравномерными параллельными шкалами	2 часа
4. Номограммы с логарифмическими параллельными шкалами	2 часа
5. Номограммы с одной криволинейной шкалой	2 часа
6. Заключительное занятие по теме	1 час

Итого 10 часов

Ниже, в соответствующих параграфах дается примерное содержание и изложение материала. По пунктам 1—4 можно рекомендовать провести лабораторные работы, которые начинаются в классе и заканчиваются дома.

§ 1. Введение

Предлагаем учащимся рассмотреть в сборнике «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса таблицы «XXI. Номограмма для решения уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ » и «XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$ ». Пользуясь ими, решаем отдельные примеры, а результаты проверяем с помощью обычных вычислений. Преимущество номограмм — быстрота нахождения значения неизвестной величины; их недостаток — сравнительно небольшая точность. Делаем вывод: там, где требуется быстро найти приближенное значение некоторой величины по данной формуле или уравнению и не требуется при этом большая точность, номограммы имеют очень большую ценность. Указываем на большое значение номограмм в производственном процессе.

Пример¹. На рисунке 1 дана номограмма скорости резания стали, которая вычисляется по формуле

$$v = \frac{30}{t^{0.45} S^{0.82}}.$$

¹ Пример заимствован из книги [3]. (См. список литературы в конце статьи.)

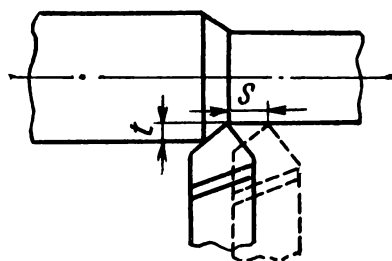
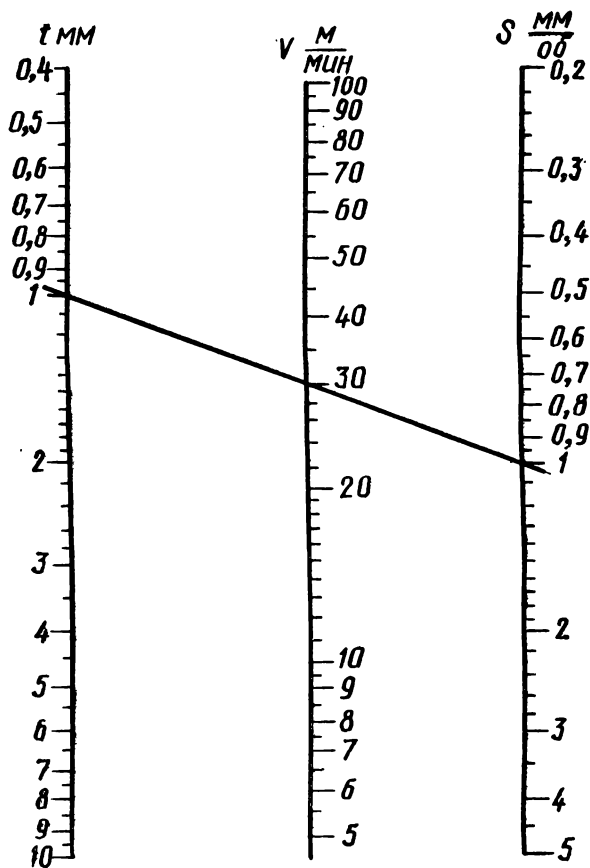


Рис. 1

В этой формуле t — глубина резания стали в мм, s — подача в $\frac{\text{мм}}{\text{об}}$ и v — скорость резания в $\frac{\text{м}}{\text{мин}}$. При этом значения t и s могут изменяться в пределах: $0,5 \leq t \leq 10$; $0,2 \leq s \leq 5$.

Чтобы найти значение v по данным t и s , надо соответствующие метки t и s соединить прямой (натянутой нитью). Тогда точка пересечения этой прямой с третьей шкалой даст метку на ней, соответствующую искомому значению v .

Даем пояснения, раскрывающие новые для учащихся понятия. Номограмма — чертеж, позволяющий без вычислений находить результат по формуле, для которой был построен чертеж. Термин «номограмма» составлен из двух греческих слов: номос — закон, грамма — письменный знак. Таким образом, термин «номограмма» в переводе имеет смысл: графическое изображение закона. Наука, в которой изучаются различные способы составления номограмм и их использования, называется номографией. Основной частью номограммы являются шкалы — линии с числовыми метками. Линии, на которые нанесены числовые метки, называются носителями шкал. Если носитель шкалы прямая, то шкалу называют прямолинейной. Шкалу называют криволинейной, если носитель — кривая линия.

В номограмме скорости резания стали мы имеем дело с прямолинейными, параллельными, неравномерными шкалами. С некоторыми неравномерными шкалами учащиеся уже встречались в школе, это — шкалы на счетной логарифмической линейке; способ их построения основан на свойствах логарифмической функции. В таблице XXII сборника таблиц В. М. Брадиса дана номограмма с двумя параллельными и одной криволинейной шкалой. Таблица XXI того же сборника представляет собой номограмму с прямолинейными равномерными шкалами, пересекающимися в одной точке (общая нулевая точка). Этой номограммой можно пользоваться для решения разных задач, приводящих к уравнению $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, например для нахождения фокусного расстояния (f) линзы, если известны расстояния предмета ($x = d_1$) и его изображения ($y = d_2$) до центра линзы, тогда $z = f$; для вычисления прово-

димости параллельного соединения сопротивлений и т. д.

Эта же номограмма при соответствующих обозначениях и ценах делений служит для определения номера крученой пряжи. Чтобы получить пряжу, скручивают две или более нити. Если скручено две нити с номерами N_1 и N_2 , то номер крученой пряжи вычисляется по формуле

$$N = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2},$$

которая приводится к виду

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} = \frac{1}{N},$$

т. е. к тому уравнению, что и в таблице ХХІ.

Все рассмотренные номограммы называются номограммами из выравненных точек. Такое название объясняется тем, что точки, соответствующие данным числам и искомому числу, всегда лежат в такого рода номограммах на одной прямой. В дальнейшем мы будем иметь дело только с номограммами из выравненных точек.

При использовании настоящего пособия следует иметь в виду, что рисунки представляют лишь схемы номограмм. Номограммы для вычислений учащиеся выполняют или на миллиметровой бумаге, или на обычной тетрадной бумаге, разграфленной в клетку.

В ряде случаев в пособии при описании той или иной номограммы указан целесообразный масштаб. На изготавливаемых учащимися номограммах число меток надо давать, как правило, больше, чем указано в рисунках. Для демонстрации в классе полезно выполнить некоторые номограммы в виде плакатов.

§ 2. Номограммы с равномерными параллельными шкалами

При построении равномерной прямолинейной шкалы выбирают определенный отрезок E в качестве единичного отрезка. Пусть $E = t$ мм (масштаб шкалы). Тогда метке x нашей шкалы соответствует отрезок $OM = tx$ мм, где O — нулевая точка, а M — точка шкалы с меткой x (рис. 2). Например: $t = 25$ мм, $x = 3,4$; тогда $OM = 51$ мм.

При построении номограмм с равномерными прямолинейными шкалами масштабы на разных шкалах могут быть разными. Выбор масштаба на каждой шкале определяется условиями задачи, для которой строится данная номограмма.

Возьмем три параллельные шкалы x , y и z так, чтобы нулевые точки их O_1 , O_2 и O_3 находились на одной прямой, причем прямая O_1O_2 перпендикулярна к прямым — носителям шкал, и шкала z лежала между шкалами x и y

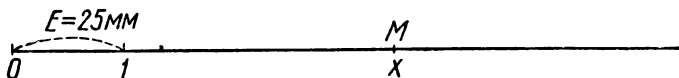


Рис. 2

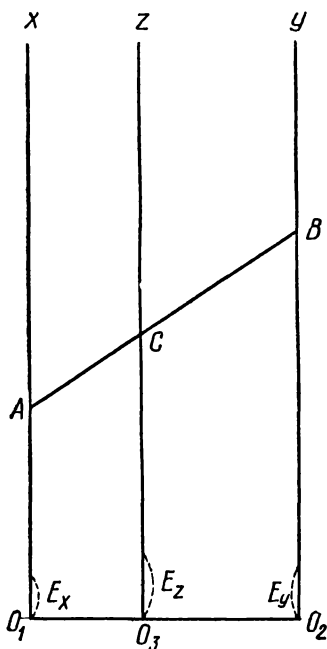


Рис. 3

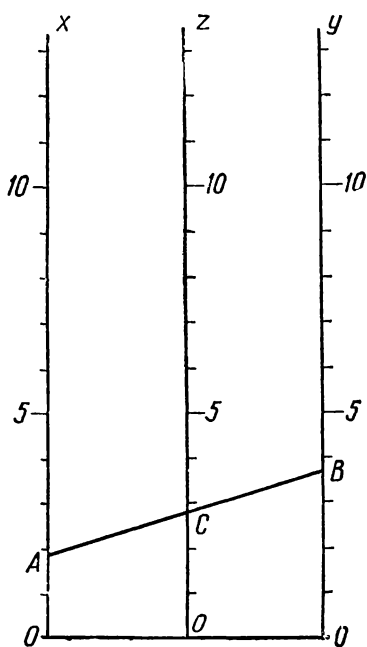


Рис. 4

(рис. 3). Пусть A , B и C — точки, расположенные соответственно на шкалах x , y и z и лежащие на одной прямой.

Если

$$O_1O_3 : O_3O_2 = p : q,$$

то можно доказать, что

$$O_3C = \frac{q}{p+q} O_1A + \frac{p}{p+q} O_2B. \quad (1)$$

Пусть единичные отрезки шкал равны:

$$E_x = m \text{ мм}, E_y = n \text{ мм}, E_z = k \text{ мм}.$$

Тогда

$$O_1A = mx \text{ мм}, O_2B = ny \text{ мм}, O_3C = kz \text{ мм}.$$

Равенство (1) на основании этого можно преобразовать к следующему виду:

$$z = \frac{q}{p+q} \cdot \frac{m}{k} x + \frac{p}{p+q} \cdot \frac{n}{k} y. \quad (2)$$

Прямая, проходящая через метки x и y соответствующих шкал, пересекает шкалу z в точке с меткой z , удовлетворяющей уравнению (2).

Рассмотрим частные случаи уравнения (2).

а) $m = n = k$ (масштабы по всем шкалам одинаковы),

$$p = q.$$

В этом случае

$$z = \frac{x+y}{2}$$

и мы получаем номограмму для нахождения среднего арифметического двух чисел (рис. 4).

б) $m = n = 2k$; $p = q$.

Теперь

$$z = x + y$$

и мы имеем номограмму сложения (рис. 5).

в)

$$z = \frac{2x+3y}{5}.$$

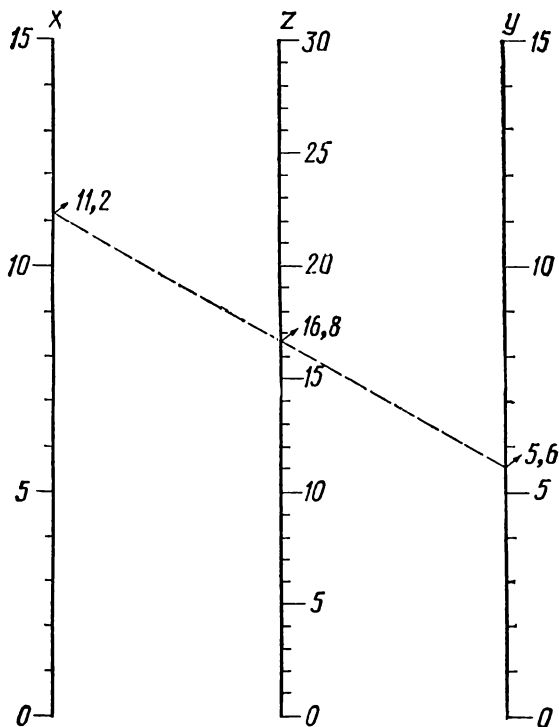


Рис. 5

Номограмму для данного уравнения можно получить, если взять $m = n = k$; $p = 3$; $q = 2$.

Эта номограмма показана на рисунке 6.

Другую номограмму для этого же уравнения можно получить, если взять $p = q$ и выбрать масштабы по осям так, чтобы

$$m : n : k = 4 : 6 : 5.$$

Эту номограмму постройте самостоятельно.

Рассмотрим общий случай. Пусть требуется построить номограмму уравнения

$$z = \alpha x + \beta y, \quad (3)$$

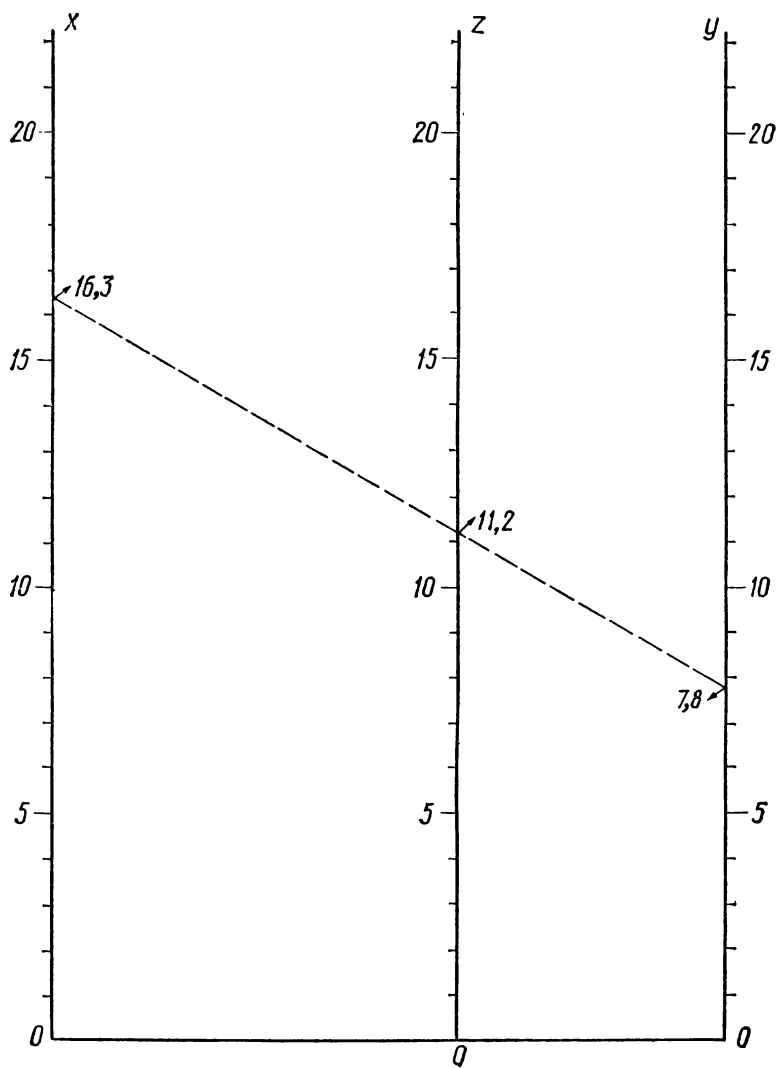


Рис. 6

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ (например, $\alpha = 2,17$; $\beta = 0,84$). Для этого надо подобрать значения p , q , m , n и k так, чтобы

$$\frac{mq}{(p+q)k} = \alpha \text{ и } \frac{np}{(p+q)k} = \beta. \quad (4)$$

Сделать это можно разными способами. Однако надо при этом учесть некоторые дополнительные условия. Такими условиями могут быть следующие:

1) числа x и y должны изменяться в определенных промежутках;

2) размеры номограммы должны быть ограниченными. Допустим, что промежутки изменений чисел x и y следующие:

$$0 \leq x \leq a \quad (a = 20); \quad 0 \leq y \leq b \quad (b = 40).$$

Кроме того, номограмма должна быть построена на листе бумаги размерами 250×200 мм. Из последнего условия следует, что числа m и n должны быть взяты так, чтобы

$$ma < 250; \quad nb < 250.$$

Определяем m и n из условий:

$$ma \text{ мм} = 200 \text{ мм}; \quad nb \text{ мм} = 200 \text{ мм}.$$

Отсюда

$$m \text{ мм} = \frac{200}{a} \text{ мм} (= 10 \text{ мм}); \quad n \text{ мм} = \frac{200}{b} \text{ мм} (= 5 \text{ мм}).$$

Строим шкалы x и y на расстоянии 150 мм.

Находим

$$c = \alpha a + \beta b \quad (5)$$

(в рассматриваемом случае $c = 2,17 \cdot 20 + 0,84 \cdot 40 = 77,0$). Для того чтобы метки a , b и c лежали на одной прямой, необходимо взять

$$k \text{ мм} = \frac{200}{c} \text{ мм} (\approx 2,6 \text{ мм}), \text{ так как в этом случае}$$

$$O_1A = O_2B = O_3C = 200 \text{ мм}.$$

Так как

$$a = \frac{200}{m}, \quad b = \frac{200}{n} \quad \text{и} \quad c = \frac{200}{k},$$

то из условия (5) получим:

$$\frac{1}{k} = \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n},$$

т. е.

$$k = \frac{mn}{m\beta + n\alpha}.$$

Это равенство определяет единичный отрезок оси z , если уже выбраны единичные отрезки для осей x и y .

Теперь надо найти положение оси z на чертеже. Для этого воспользуемся равенствами (4), из которых найдем:

$$\frac{np}{mq} = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ или } \frac{p}{q} = \frac{m\beta}{n\alpha}.$$

Так как шкала z параллельна шкалам x и y , то достаточно построить одну точку этой оси. Эту точку построим следующим образом (рис. 7). Соединим нуль шкалы y с меткой βt шкалы x (точка M), а нуль шкалы x с меткой αt шкалы y (точка N), подбирая при этом подходящий множитель t (для принятых конкретных данных на чертеже взято: $t = 10$; $\beta t = 8,4$; $\alpha t = 21,7$). Пусть T — точка пересечения прямых O_1N и O_2M . Так как

$$O_1M = m\beta t \text{ мм}; \quad O_2N = n\alpha t \text{ мм},$$

то

$$\frac{O_1M}{O_2N} = \frac{m\beta}{n\alpha} = \frac{p}{q}.$$

Так как $\triangle O_1MT \sim \triangle O_2NT$, то отношение расстояний точки T до шкал x и y равно $\frac{p}{q}$. Значит, точка T лежит на шкале z . Этим шкала z полностью определена. Детали построения видны из рисунка 7.

Пример использования номограммы. Пусть $x = 15,6$; $y = 13,7$. Прямая (натянута нить), проходящая через метки 15,6 шкалы x и 13,7 шкалы y пересекает шкалу z в точке, соответствующей значению $z = 45,2$, и мы получаем:

$$2,17 \cdot 15,6 + 0,84 \cdot 13,7 \approx 45,2.$$

Если в номограмме уравнения $z = \alpha x + \beta y$ шкалу z сдвинуть по прямой, на которой она расположена, так,

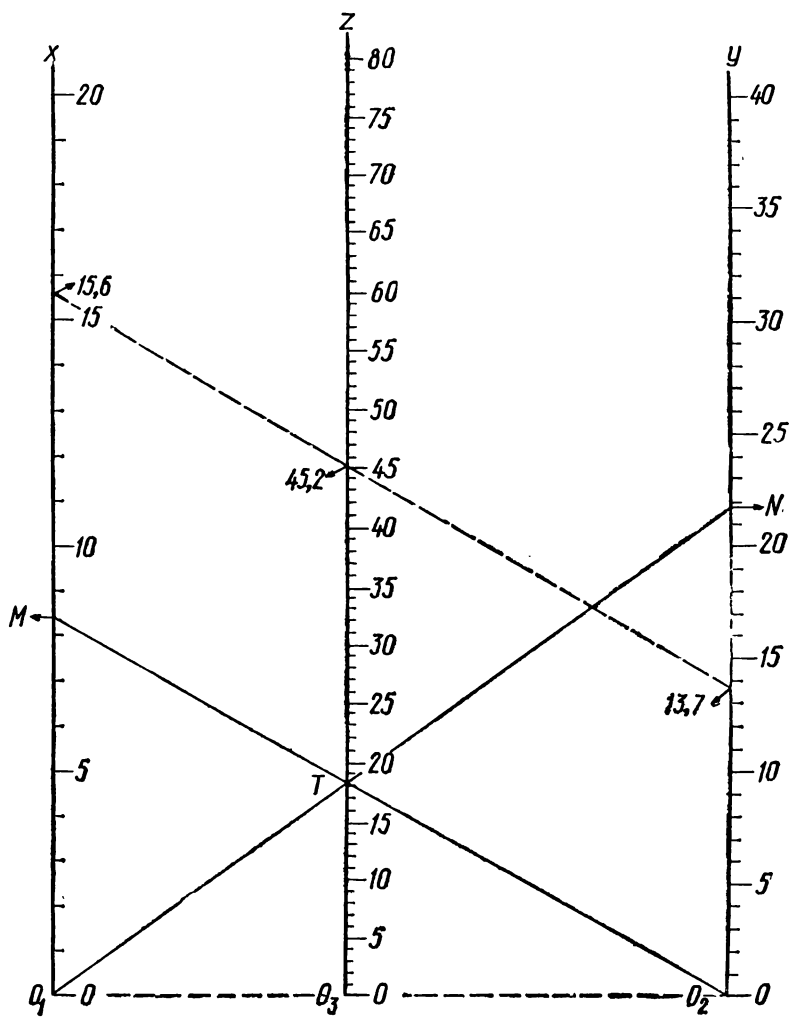


Рис. 7

чтобы точка O_3 соответствовала метке j этой шкалы, то все значения $\alpha x + \beta y$ увеличатся на j , т. е. мы таким способом получим номограмму уравнения

$$z = \alpha x + \beta y + j.$$

Постройте указанным способом номограмму уравнения

$$z = 2,17x + 0,84y + 16,3.$$

§ 3. Номограммы с неравномерными параллельными шкалами

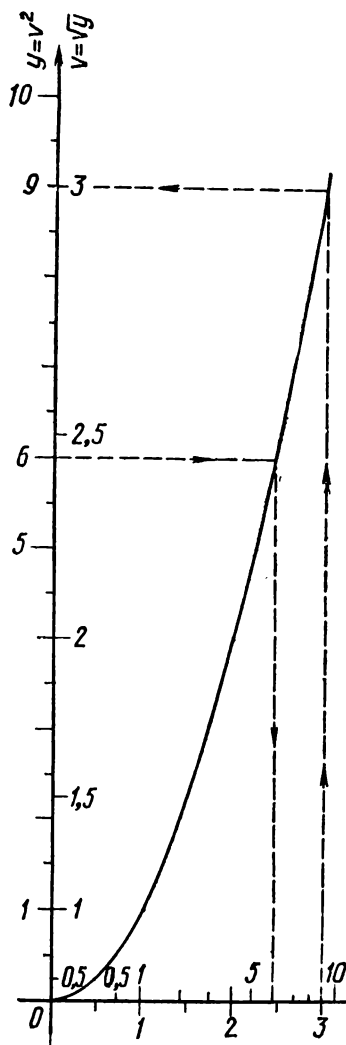
Для графического нахождения квадратов чисел и квадратных корней из них можно пользоваться графиком функции $y = x^2$. Если теперь с помощью этого графика мы на оси x отметим квадраты соответствующих чисел, то на ней получим двойную шкалу: равномерную шкалу чисел x и неравномерную шкалу квадратов этих чисел (рис. 8). Пользуясь только одной такой двойной шкалой, можно находить приближенные значения квадратов и корней квадратных из положительных чисел. Если теперь аналогичное построение мы сделаем на оси y , то на ней тоже получим двойную шкалу: равномерную шкалу чисел и неравномерную шкалу корней квадратных из соответствующих чисел. С помощью таких неравномерных шкал можно расширить возможности полученной в предыдущем параграфе номограммы.

Возьмем равномерную шкалу x с масштабной единицей m мм. Пусть деления шкалы x нанесены по одну сторону от прямой. На этой же прямой, но по другую сторону ее построим неравномерную шкалу u так, чтобы метка u совпала с меткой $x = \sqrt{u}$. Следовательно, данному значению u будет соответствовать отрезок шкалы от ее начала длиной $m\sqrt{u}$ мм. На рисунке 9 дана такая шкала при $m = 10$ мм. Для значений u от 1 до 10 цена деления на ней 1 единица; при $10 < u < 20$ цена деления 2 единицы; наконец, при $20 < u < 400$ цена деления 10 единиц.

Для равномерной шкалы y с масштабной единицей n мм построим аналогичным образом шкалу v так, чтобы

метка v совпадала с меткой $y = v^2$. Следовательно, данному значению v будет соответствовать отрезок шкалы от начала длиной nv^2 мм. На рисунке 9 построена такая шкала при $n = 5$ мм.

Заменим в номограмме уравнения $z = \alpha x + \beta y$ шкалы x



и y построенными таким путем двойными шкалами (x, u) и (y, v) . Мы получим более сложную номограмму, по которой можно найти приближенное значение z для любой из следующих формул:

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + \beta y, \\ z &= \alpha x + \beta v^2, \\ z &= \alpha \sqrt{u} + \beta y, \\ z &= \alpha \sqrt{u} + \beta v^2. \end{aligned}$$

Остановимся на последней формуле. Беря точки на шкалах u и v с метками u и v , мы этим самым берем точки на шкалах x и y с метками $x = \sqrt{u}$ и $y = v^2$. Следовательно, прямая, проходящая через эти точки, пересечет шкалу z в точке с меткой

$$z = \alpha \sqrt{u} + \beta v^2.$$

На рисунке 9 указанные построения проведены для номограммы уравнения

$$z = 2,17x + 0,84y,$$

Рис. 8

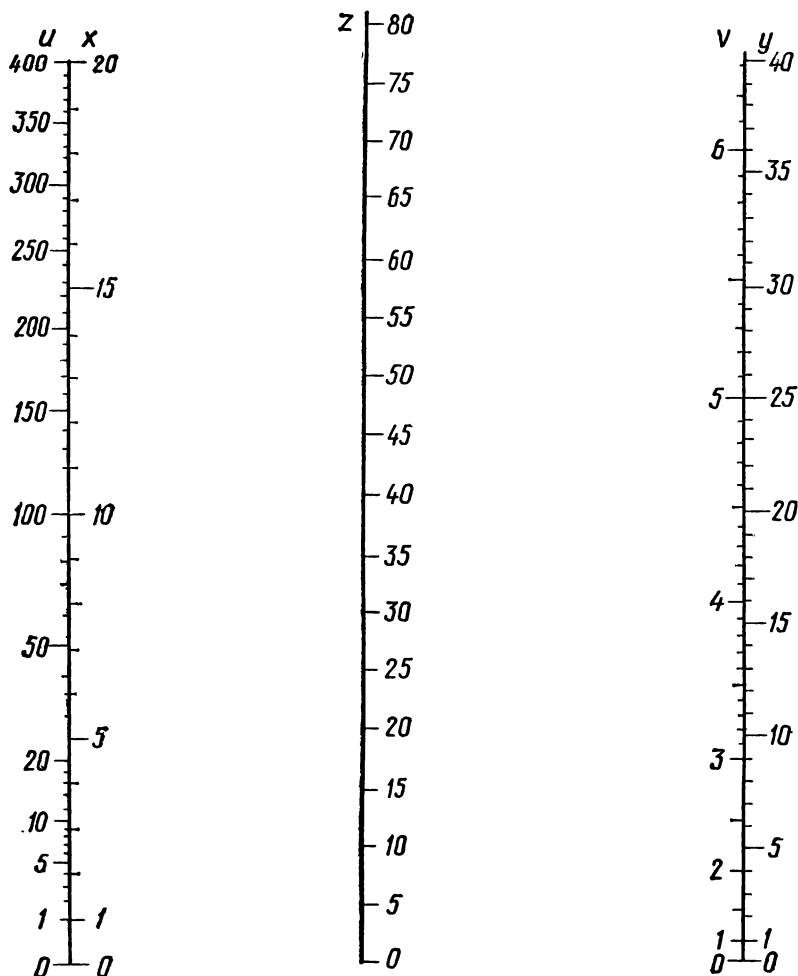


Рис. 9

и поэтому мы тем самым получили номограмму уравнения (рис. 10)

$$z = 2,17 \sqrt{u} + 0,84v^3.$$

Заметим, что шкалы x и y для последнего уравнения оказываются лишними, и их поэтому можно на чертеже не показывать (рис. 10).

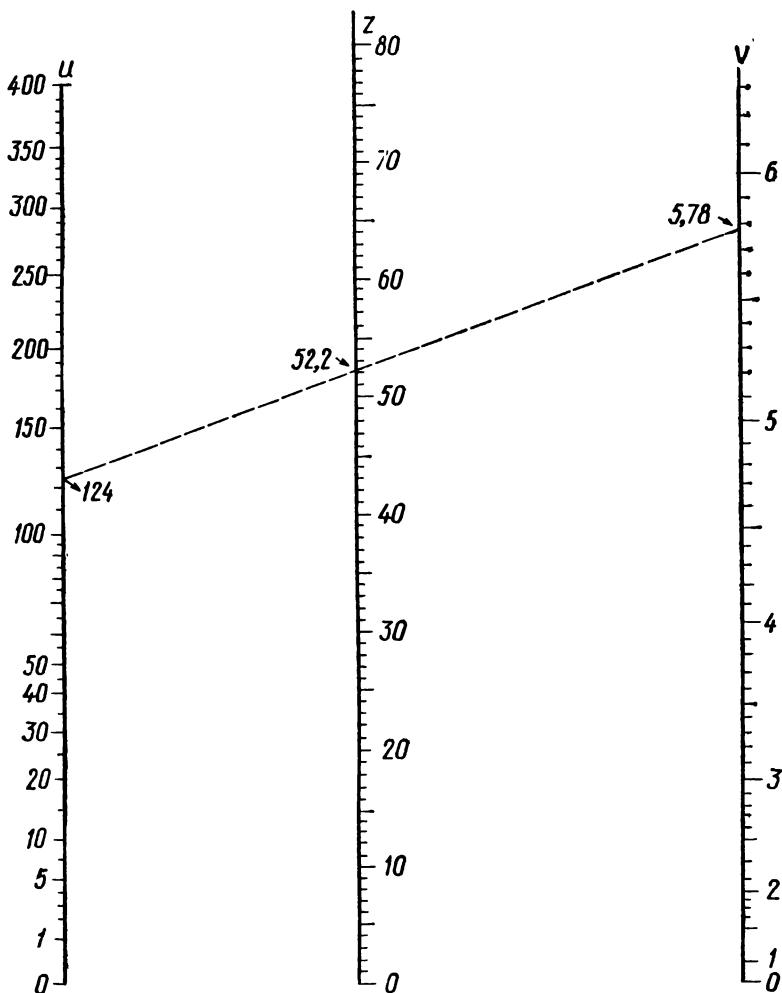


Рис. 10

Если опустить на данной сложной номограмме шкалы u и y , то получим номограмму только для уравнения

$$z = \alpha x + \beta v^3.$$

Можно сделать еще один шаг. Положим $z = w^3$ и построим шкалу w , совмещенную со шкалой z , и такую, что метке w будет соответствовать метка $z = w^3$. Очевидно,

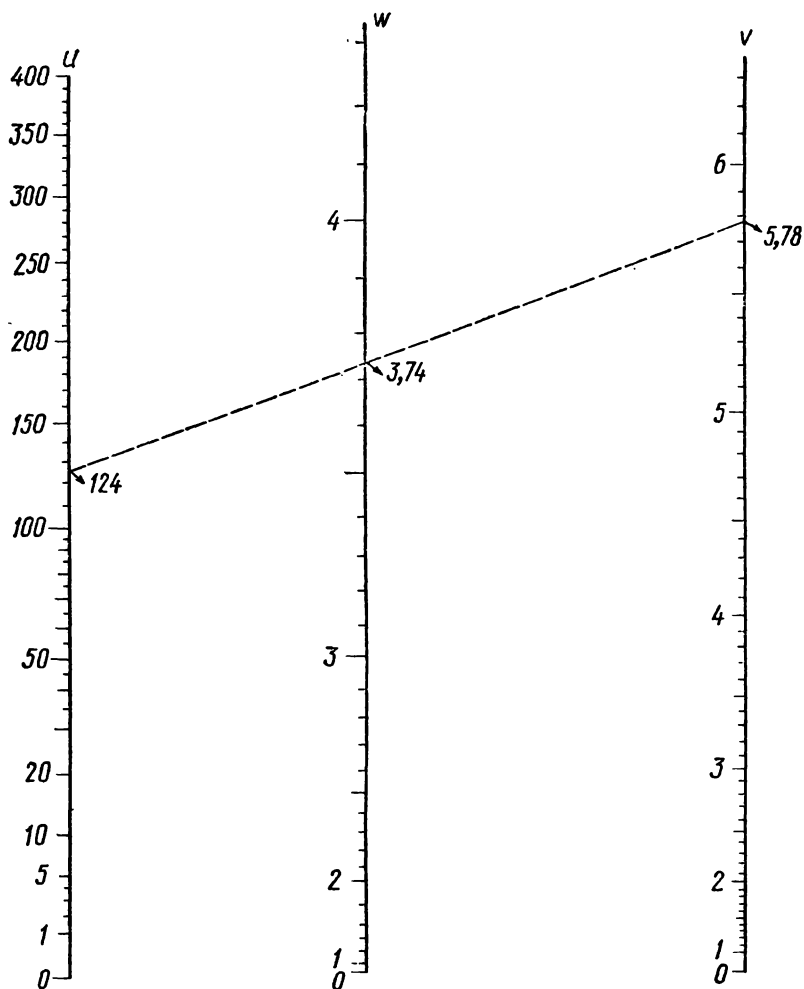


Рис. 11

что отрезок шкалы w от начала до метки w будет равен kw^3 мм, если единичный отрезок оси z равен k мм. Это сделано для рассмотренной выше сложной номограммы, благодаря чему ее возможности расширились. В частности, пользуясь шкалами u , v и w , мы сможем по данным u и v находить значение w для уравнения

$$w^3 = 2,17\sqrt{u} + 0,84v^2,$$

или

$$w = \sqrt[3]{2,17\sqrt{u} + 0,84v^2}.$$

Очевидно, что для номограммы последнего уравнения шкалы x , y и z лишние, и их можно на чертеже не показывать. Это сделано на рисунке 11.

Пример:

$$z = \sqrt[3]{2,17 \cdot \sqrt{124} + 0,84 \cdot 5,78^2} = 3,74.$$

§ 4. Номограммы с логарифмическими параллельными шкалами

Для построения номограммы очень часто пользуются логарифмическими шкалами. Примерами их являются три шкалы логарифмической линейки. Шкалы квадратов ($y = x^2$) и кубов ($z = x^3$) получаются из основной шкалы (x) сжатием соответственно в 2 и 3 раза.

Перенесем на лист бумаги с логарифмической линейки основную шкалу, возьмем какую-либо точку S и соединим ее с концами P и Q шкалы и с ее основными метками прямыми (рис. 12). Полученный чертеж позволяет легко получить шкалы квадратов и кубов. Для этого достаточно провести прямые P_1Q_1 и P_2Q_2 , параллельные шкале PQ и пересекающие прямые SP и SQ соответственно в точках P_1 , P_2 , Q_1 и Q_2 таким образом, чтобы

$$\frac{SQ_1}{SQ} = \frac{1}{2}, \quad \frac{SQ_2}{SQ} = \frac{1}{3}.$$

На этих отрезках получим искомые шкалы с той же ценой деления (на рисунке 12 на участке $1 < x < 3$ цена деления 0,1 ед., на участке $3 < x < 6 - 0,2$ ед. и на участке $6 < x < 10 - 0,5$ ед.).

Растяжение шкалы x в 2 или 3 раза даст шкалы чисел \sqrt{x} и $\sqrt[3]{x}$. Заметим, что если взять шкалу $y = x^2$ за основную, то шкала x будет также шкалой \sqrt{y} .

Если основную шкалу подвергнуть сжатию в r раз, то получим шкалу $u = x^r$. Растягивая затем шкалу u в t раз, получим шкалу

$$v = \sqrt[t]{u} = \sqrt[t]{x^r}.$$

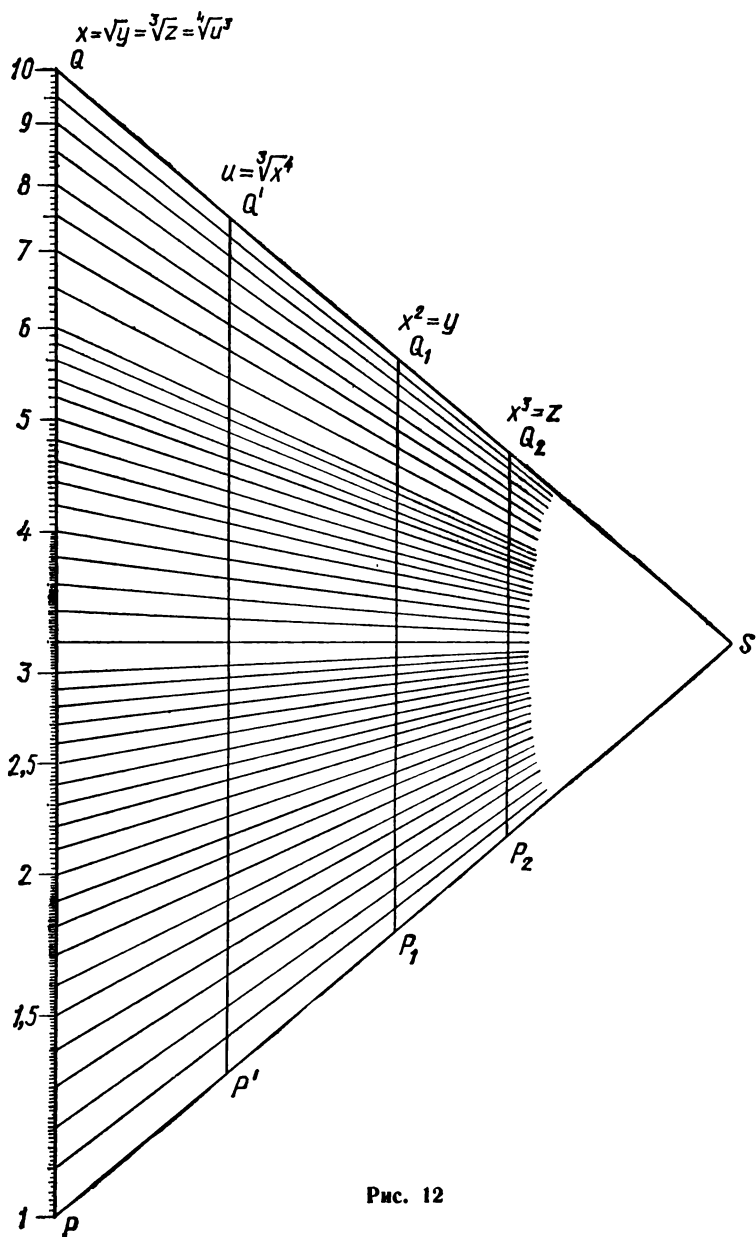


Рис. 12

Мы приходим к следующему результату: чтобы получить шкалу $v = \sqrt[t]{x^r}$, достаточно провести прямую, параллельную шкале PQ и пересекающую лучи SP и SQ соответственно в точках P' и Q' таким образом, чтобы

$$\frac{SP'}{SP} = \frac{SQ'}{SQ} = \frac{t}{r}.$$

На рисунке 12 такое построение сделано для $t=3$ и $r=4$. Этим получена шкала для $u = \sqrt[3]{x^4}$.

На рисунке 13 шкалы x, y и u параллельны, а их метки 1 находятся на одном перпендикуляре к этим шкалам. Пользуясь этим рисунком, можно по одному из этих чисел находить любое из остальных. Соответствующие метки шкал будут лежать на одном перпендикуляре к этим шкалам. При построении шкал использовано основное свойство логарифмической шкалы: участки шкалы для промежутков от 10 до 100, от 100 до 1000 и т. д. получаются из участка для промежутка от 1 до 10 путем увеличения цены деления соответственно в 10, 100 и т. д. раз. Так как $y = x^2$, а $u = \sqrt[3]{x^4}$, то числа x, y и u связаны при этом следующим образом: $x = \sqrt{y} = \sqrt[4]{u^3}$. Числовой пример: $4,08 = \sqrt{16,6} = \sqrt[4]{6,5^3}$.

Покажем теперь, как можно с помощью логарифмических шкал построить номограмму для уравнения

$$z^s = x^r y^t, \quad (1)$$

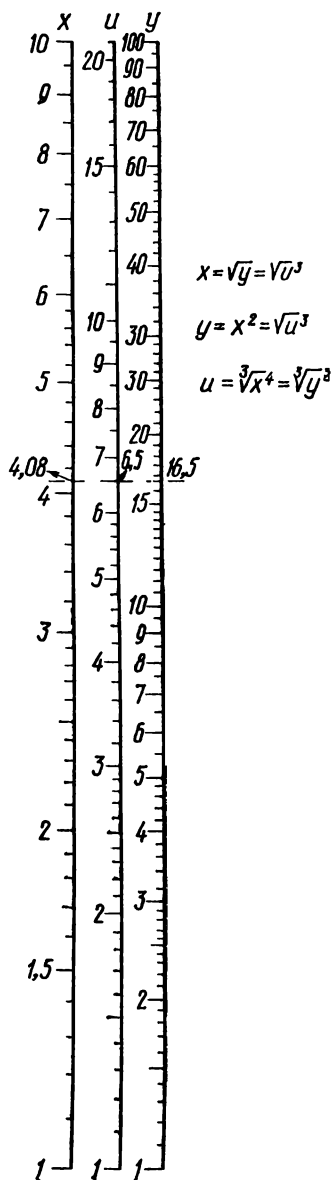


Рис. 13

где s , r и t — натуральные числа. Рассмотрим уравнение

$$sw = ru + tv,$$

которое заменим равносильным уравнением

$$w = \frac{r}{s} u + \frac{t}{s} v. \quad (2)$$

Построим номограмму уравнения (2) способом, рассмотренным в § 2, и заменим затем равномерные шкалы u , v и w логарифмическими так, чтобы промежуток от 0 до 1 каждой равномерной шкалы был заменен промежутком от 1 до 10 логарифмической шкалы. Заменяя затем буквы u , v и w соответственно буквами x , y и z , получим номограмму уравнения (1).

Этот факт также следует из особых свойств логарифмических шкал. Рассмотрим частные случаи.

При $r = t = 1$ и $s = 2$ имеем:

$$w = \frac{u + v}{2}.$$

Номограмма этого уравнения дана на рисунке 4. На ней все три шкалы одинаковы и равномерны. Заменяя их одинаковыми логарифмическими шкалами, получим номограмму уравнения (рис. 14):

$$z^2 = xy, \quad \text{или} \quad z = \sqrt{xy}.$$

При $r = t = s = 1$ получим номограмму сложения (рис. 5):

$$w = u + v.$$

И здесь все три шкалы равномерные, но одинаковыми являются шкалы u и v , а масштабная единица средней шкалы вдвое меньше. Замена этих шкал логарифмическими даст номограмму умножения:

$$z = xy.$$

При построении этой номограммы удобно для шкал x и y взять масштабную единицу 250 мм. Тогда масштабная единица равностоящей от них шкалы будет 125 мм. Это значит, что шкалы для x и y в этом случае совпадут с основной шкалой логарифмической линейки, а шкала для z — со шкалой квадратов ее.

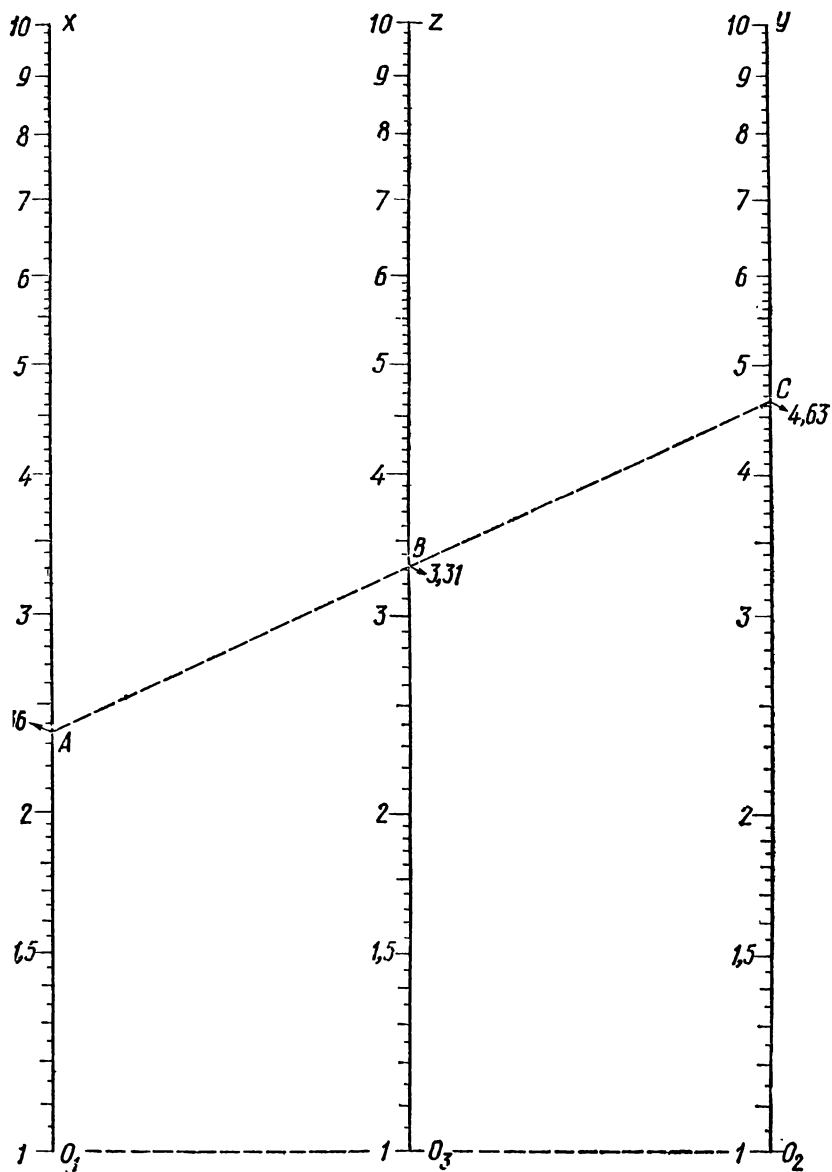


Рис. 14

Для построения номограммы уравнения

$$z^6 = x^5 y^3$$

строим сначала номограмму уравнения

$$w = \frac{5}{6} u + \frac{3}{6} v.$$

Для удобства построения возьмем шкалы u и v одинаковыми с масштабной единицей 250 мм (рис. 15). Масштабная единица шкалы w определится условием:

$$k \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{6} \right) = 250 \text{ (мм)}.$$

Отсюда $k \text{ мм} = 187,5 \text{ мм}$. Положение шкалы w определяем способом, описанным выше (§ 2). На всех этих трех шкалах достаточно отметить только нулевые и единичные точки, так как этим логарифмические шкалы полностью определены. Замена шкал u , v и w соответствующими логарифмическими шкалами x , y и z дает номограмму уравнения (рис. 16):

$$z = \sqrt[6]{x^5 y^3} \text{ или } z = \sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[3]{y}.$$

Номограмму уравнения

$$z = c \sqrt[3]{x^2 y^2}$$

мы получим из номограммы уравнения

$$z = \sqrt[3]{x' y^2},$$

сдвинув шкалу z так, чтобы метка c ее оказалась на прямой, соединяющей начальные (единичные) метки шкал x и y (при этом окажется, что $z = c \sqrt[3]{1} = c$). На рисунке 17 таким путем построена номограмма уравнения

$$z = 2,67 \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[3]{y}.$$

§ 5. Номограммы с одной криволинейной шкалой

Рассмотрим примеры номограмм, в которых одна из шкал является криволинейной, а две другие — прямолинейные и параллельные. Ограничимся номограммами для решения уравнений второй и третьей степени с одним неизвестным.

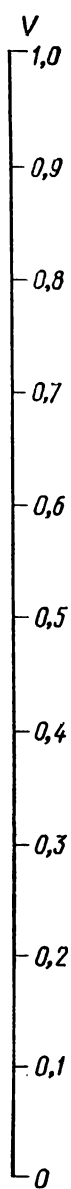
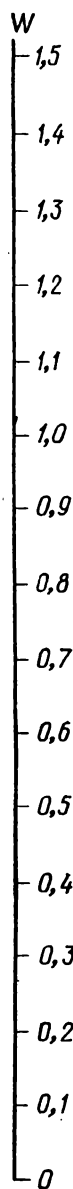
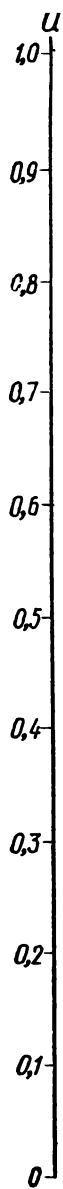


Рис. 15

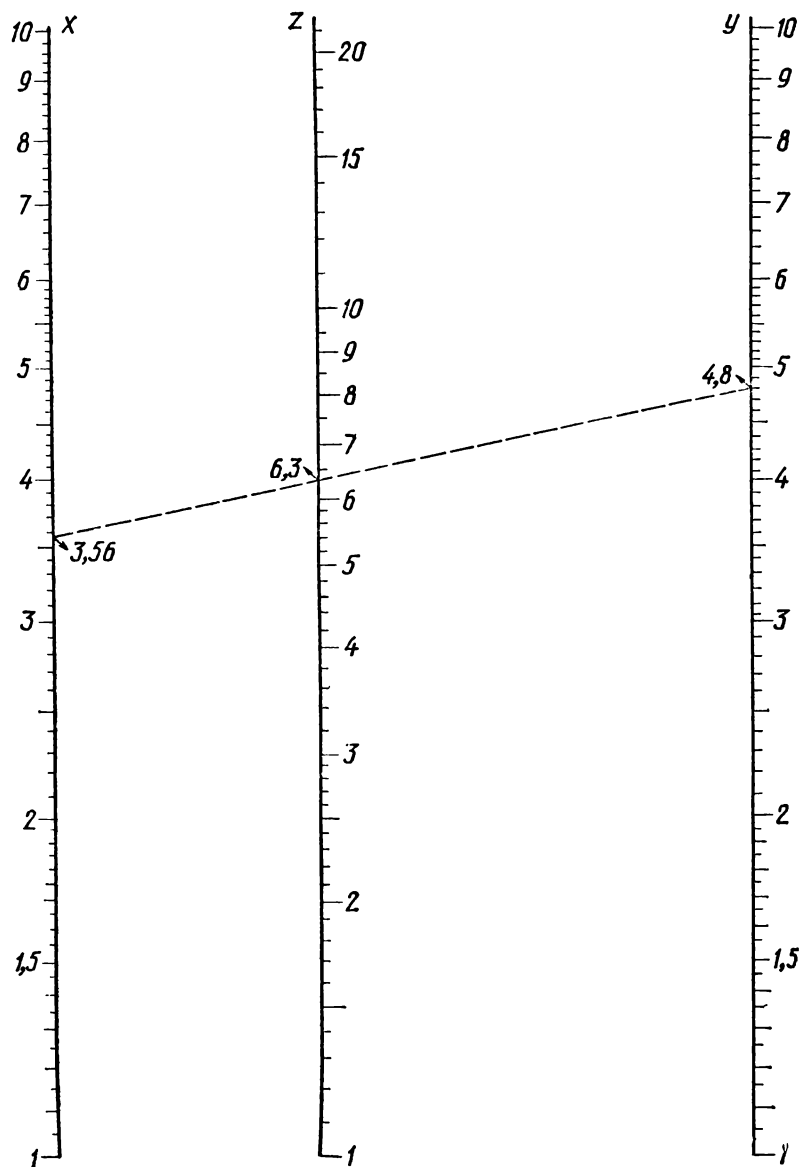


Рис. 16

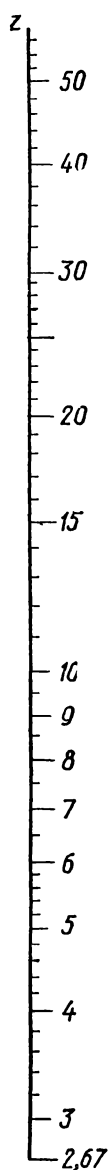


Рис. 17

Пусть координаты x и y точки M заданы условиями:

$$x = \frac{a}{1+t}, \quad y = \frac{t^2}{1+t}, \quad (1)$$

где $0 \leq t < +\infty$ и $a > 0$. Выбор значений параметра a произволен. Выясним, что представляет множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют данным условиям.

При возрастании t от 0 до $+\infty$ координата x точки M убывает от a до 0 (исключая нуль). Для любого $t \in [0; +\infty[$ мы получим соответствующее единственное значение $x \in]0; a]$. Так как $t = \frac{a}{x} - 1$, то, наоборот, любому $x \in]0; a]$ соответствует определенное значение $t \in [0; +\infty[$.

Рассмотрим теперь, как изменяется координата y при изменении t от 0 до $+\infty$. Для этого преобразуем выражение y через t следующим образом:

$$y = (t+1) + \frac{1}{t+1} - 2 = \frac{a}{x} + \frac{x}{a} - 2 = \left(\sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a}} \right)^2.$$

Следовательно, искомое множество точек представляет график функции

$$y = \frac{a}{x} + \frac{x}{a} - 2$$

при $x \in]0; a]$ (рис. 18). При $t = 0$ $y = 0$. При возрастании t от 0 до $+\infty$ координата x убывает от a до 0, $\sqrt{\frac{x}{a}}$ убывает от 1 до 0, а $\sqrt{\frac{a}{x}}$ возрастает от 1 до $+\infty$. Отсюда следует, что при этом $\sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a}}$ возрастает от 0 до $+\infty$, и поэтому координата y тоже возрастает в тех же пределах.

Условия (1) называются параметрическими уравнениями данной кривой.

Свяжем с этой кривой прямую, проходящую через точки $P(0; p)$ и $Q(a; q)$.

Уравнение этой прямой:

$$y = \frac{q-p}{a}x + p.$$

Найдем точки пересечения данной прямой и кривой (1).

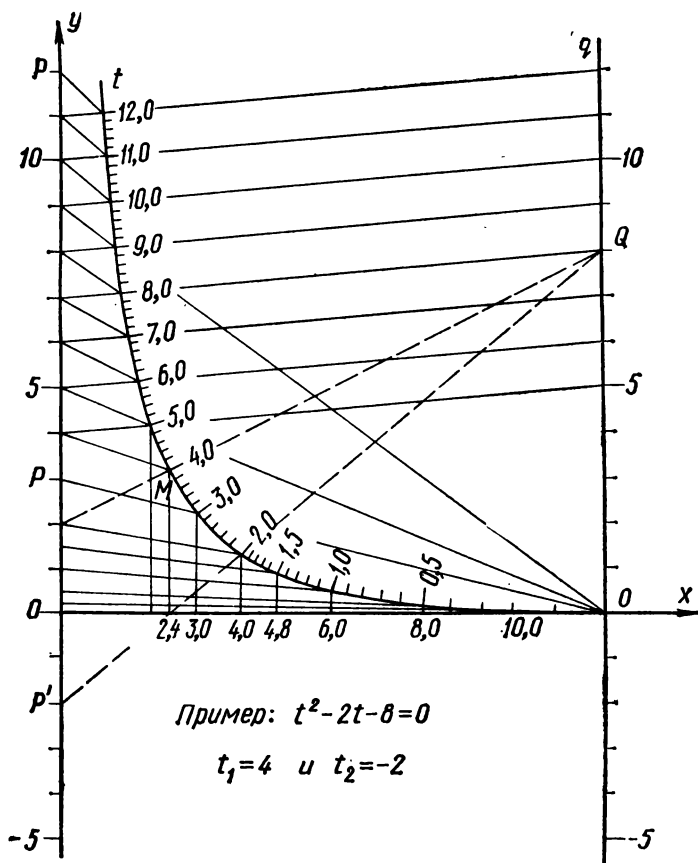


Рис. 18

Для этого надо решить систему:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{1+t}, \\ y = \frac{t^2}{1+t}, \\ y = \frac{q-p}{a}x + p. \end{cases}$$

Подставляя в третье уравнение выражения неизвестных

x и y через t , получим: $\frac{t^2}{1+t} = (q-p) \cdot \frac{1}{1+t} + p$.

После преобразований получим уравнение для t :

$$t^2 - pt - q = 0. \quad (2)$$

Корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0; +\infty[$, дадут решение поставленной задачи, так как по ним мы найдем координаты искоемых точек. Число этих точек равно числу положительных корней уравнения (2).

Если мы знаем, какому значению t соответствует точка пересечения прямой PQ и данной кривой, то этим самым мы знаем и положительный корень уравнения (2).

Это обстоятельство позволяет превратить наш чертеж в номограмму для решения уравнения (2). Для этого отметим на кривой точки, соответствующие значениям параметра t , взятым через определенные промежутки. Тогда на кривой мы получим шкалу значений t . Остается построить равномерные шкалы коэффициентов p и q . Масштабные единицы этих шкал совпадают с единичным отрезком; одна из шкал совпадает с осью y , а другая ей параллельна и проходит через точку $(a; 0)$; нулевые точки этих шкал лежат на оси x (рис. 18).

Рассмотрим теперь, как можно построить данную номограмму. Построение проведем на стандартном листе миллиметровой бумаги, за единицу масштаба возьмем 1 см, и примем $a = 12$. Ось y примем за шкалу значений параметра p ; прямая $x = 12$ явится носителем значений параметра q . Эти шкалы будут равномерными с нулевыми точками, лежащими на оси x . Криволинейную шкалу, носительницу значений t , построим «по точкам». Для этого построим опорные точки для следующих значений t : 0,2; 0,5; 1,0; 1,5 и для всех целых чисел от 2 до 12. После этого соединим построенные точки плавной кривой, отметив на ней соответствующие значения t и нанесем на глаз другие значения t с тем, чтобы на промежутке $0 \leq t \leq 2$ цена деления была 0,1, а на остальных промежутках 0,2.

Построение точек криволинейной шкалы с отмеченными на ней значениями t можно провести следующим образом.

Рассмотрим прямые

$$y = -\frac{t}{a}x + t \text{ и } y = \frac{x}{a} + t - 1,$$

где t — параметр. Легко убедиться, что точка пересечения этих прямых имеет координаты:

$$x = \frac{a}{1+t}; \quad y = \frac{t^2}{1+t}.$$

Это значит, что точка пересечения их принадлежит криволинейной шкале и соответствует метке t . Прямая

$$y = -\frac{t}{a}x + t$$

проходит через точки $(0; t)$ и $(a; 0)$. Вторая точка, как видим, является нулевой точкой шкалы q , а первая — точка шкалы p с меткой t . Прямая $y = \frac{x}{a} + (t-1)$ проходит через точки $(0; t-1)$ и $(a; t)$, т. е. через метку $t-1$ шкалы p и метку t шкалы q . Наконец, прямая

$$x = \frac{a}{1+t}$$

параллельна оси y и проходит через точку пересечения первых двух прямых. Построение указанных опорных точек на рисунке 18 проведено: на промежутке от 0 до 5 с помощью прямых

$$x = \frac{12}{1+t} \quad \text{и} \quad y = -\frac{t}{12}x + t;$$

на промежутке от 5 до 12 с помощью прямых

$$y = -\frac{t}{12}x + t \quad \text{и} \quad y = \frac{x}{12} + (t-1).$$

Построенная номограмма позволяет получить только положительные корни уравнения (2). Для нахождения отрицательных корней (если они имеются) делаем замену: $t = -z$. При этой замене уравнение (2) перейдет в уравнение

$$z^2 - (-p)z - q = 0.$$

Найдя его положительные корни, найдем этим и отрицательные корни уравнения (2).

В таблицах В. М. Брадиса (таблица XXII) дана номограмма для решения уравнения

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Эта номограмма получается из построенной нами путем отражения от оси x .

Примеры

а) $t^2 - 9t + 5,3 = 0$; $t_1 = 8,4$; $t_2 \approx 0,63$;

б) $t^2 - 9t - 5,3 = 0$; $t_1 \approx 9,55$; $t_2 = -0,56$;

в) $t^2 + 42t - 816 = 0$.

Пусть $t = 10z$. Тогда получим

$$100z^2 + 420z - 816 = 0, \text{ или } z^2 + 4,20z - 8,16 = 0.$$

Находим: $z_1 = 1,45$; $z_2 = -5,65$; $t_1 = 14,5$; $t_2 = -56,5$.

Перейдем теперь к номограмме для решения уравнения:

$$t^3 - pt - q = 0. \quad (3)$$

Вернемся к условиям (1), но вместо точки M с координатами

$$x = \frac{a}{1+t}, \quad y = \frac{t^3}{1+t}$$

возьмем точку M' с той же абсциссой и с ординатой

$$Y = ty = \frac{t^3}{1+t}.$$

Очевидно, что множество таких точек представляет кривую, которая получается из кривой, определяемой условиями (1), растяжением ординаты каждой точки ее в t раз, где t — соответствующее значение параметра.

Решение системы

$$\begin{cases} x = \frac{a}{1+t}, \\ y = \frac{t^3}{1+t}, \\ y = \frac{q-p}{a}x + p \end{cases}$$

приводит, как легко видеть, к уравнению

$$t^3 - pt - q = 0.$$

Нанося на полученной кривой значения параметра t и строя так же, как выше, шкалы для p и q , получим номограмму для решения уравнения (3). На рисунке 19 представлена такая номограмма при $a = 24$.

Построение точек криволинейной шкалы и меток на ней можно провести примерно тем же путем, который

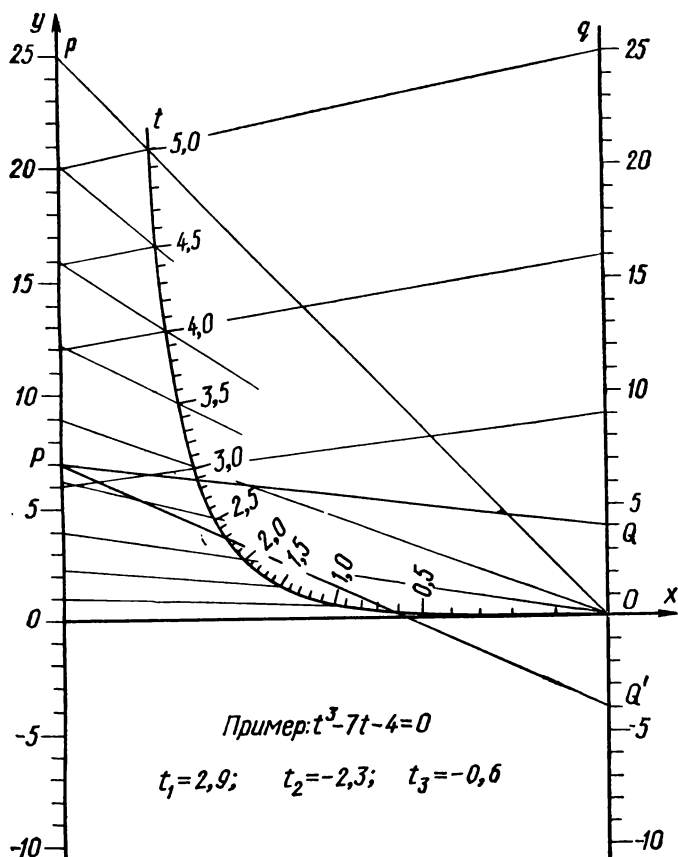


Рис. 19

рассмотрен выше. Точка M' с меткой t будет теперь общей точкой трех прямых:

- 1) прямой $x = \frac{a}{1+t}$, параллельной оси y ;
- 2) прямой $y = t \left(-\frac{t}{a} x + t \right) = -\frac{t^2}{a} x + t^2$, проходящей через точки $(a; 0)$ и $(0; t^2)$;
- 3) прямой $y = t \left(\frac{x}{a} + t - 1 \right) = \frac{t}{a} x + t^2 - t$, проходящей через метку t^2 шкалы q и метку $t^2 - t$ шкалы p .

Детали построения видны на рисунке 19. При выполнении его за единичный отрезок взят отрезок 5 мм и принято $a=24$.

Номограмма для уравнения (3) позволяет найти только положительные его корни. Для отыскания его отрицательных корней положим, как и выше, $t = -z$. Такая замена приводит к уравнению

$$z^3 - pz - (-q) = 0, \quad (3-a)$$

положительные корни которого дадут абсолютные величины отрицательных корней уравнения (3).

Пример. Дано уравнение $t^3 - 7t - 4 = 0$. Находим его положительные корни $t_1 = 2,9$. Переходим к уравнению

$$z^3 - 7z - (-4) = 0.$$

Его корни:

$$z_2 = 2,3; \quad z_3 = 0,6.$$

Отсюда

$$t_2 = -2,3; \quad t_3 = -0,6.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Глаголев А. А. Номография для школьников. Учпедгиз, 1959.
2. Пентковский М. В. Считающие чертежи. Физматгиз, 1959.
3. Колосов А. А. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах. Учпедгиз, 1963. глава II.
4. Лепский М. М. Номограммы для решения треугольников. Учпедгиз, 1961.
5. «Летняя школа на Рубском озере». Решение уравнений с помощью номограмм. М., «Просвещение», 1971, глава 3.

Программой факультативных занятий предусмотрено «Решение задач по общему курсу» в VII классе — 10 часов и в VIII — 20 часов.

Ниже предлагаются задачи по арифметике, алгебре и геометрии, решение которых требует хороших знаний по математике в объеме обязательной ныне действующей программы. Для решения некоторых упражнений необходимы знания особых приемов, хотя и не выходящих за пределы основной программы по математике, но не рассматриваемых в школьных учебниках. К этим упражнениям в большинстве случаев сделаны небольшие указания.

Многие задачи по арифметике требуют приемов, обычно рассматриваемых в школьном курсе алгебры; поэтому упражнения по арифметике не выделены в особый раздел, а даются под общим заглавием «Арифметика и алгебра».

Задачи по геометрии разделены на три части: на построение, доказательство, вычисление. В практической работе учитель выберет порядок решения задач, наиболее приемлемый с его точки зрения с учетом знаний учащихся, приступивших к факультативным занятиям.

Арифметика и алгебра

1. а) Найдите наименьшее число, при делении которого на $\frac{35}{66}$, $\frac{28}{165}$ и $\frac{25}{231}$ получаются целые числа. $\left[\frac{700}{33} \right]$

б) Найдите наибольшее число, при делении на которое каждой из дробей $\frac{154}{195}$, $\frac{385}{156}$ и $\frac{231}{130}$ получаются целые числа.

$$\left[\frac{77}{780} \right]$$

в) Дано несколько положительных рациональных чисел, например четыре несократимые дроби: $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, $\frac{m_3}{n_3}$, $\frac{m_4}{n_4}$. Объясните, почему наименьшее число, при делении которого на каждую из этих дробей получаются целые числа, равно $\frac{\text{НОК}(m_1, m_2, m_3, m_4)}{\text{НОД}(n_1, n_2, n_3, n_4)}$.

2. а) $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, причем $0 < m < n$. Доказать: $\frac{m}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{m-r}{n(k+1)}$, где k — неполное частное от деления n на m , r — остаток.

б) Пользуясь доказанной формулой, представьте числа $\frac{9}{10}$, $\frac{28}{37}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{50}{113}$ в виде суммы нескольких дробей с числителем 1 и разными знаменателями.

3. а) Куплено несколько килограммов конфет по 1 руб. 80 коп. за килограмм и столько же по 1 руб. 20 коп. Найдите среднюю цену 1 кг купленных конфет. [1,5 руб.]

б) На некоторую сумму денег куплено конфет по 1 руб. 80 коп. за килограмм и на такую же сумму — по 1 руб. 20 коп. Найдите среднюю цену за 1 кг купленных конфет. [1,44 руб.]

в) Решите задачи 3а и 3б в общем виде, приняв цены за a и b . Средняя в первом случае называется *средней арифметической* a и b , во втором — *средней гармонической* a и b .

4. а) Автобус затратил на прохождение каждого из трех участков пути между пунктами A и B одно и то же время. На первом участке средняя скорость автобуса 56 км/ч, во втором — 30 км/ч и на третьем — 70 км/ч. Чему равна средняя скорость автобуса на всем пути от A до B ? [52 км/ч]

б) Весь путь от пункта M до пункта N разделен на три равных по длине участка. Первый участок автобус прошел со средней скоростью 56 км/ч, второй — со сред-

ней скоростью 30 км/ч и третий—70 км/ч. Чему равна средняя скорость автобуса на всем пути от M до N ?

[$\approx 45,8$ км/ч]

в) Напишите формулу средней арифметической трех величин: a , b и c и средней гармонической тех же величин. Проверьте решение предыдущих двух задач, применяя эти формулы.

5. а) Четверть объема ванны наполнялась со скоростью 45 л в минуту, а остальные три четверти—по 75 л в минуту. Сколько литров в минуту в среднем вливалось в ванну?

[$\approx 64,3$ л]

б) Ванна наполнена за несколько минут. В течение четверти этого времени вода поступала со скоростью 45 л в минуту, а остальное время со скоростью 75 л в минуту. Найдите среднюю скорость наполнения ванны.

[67,5 л/мин]

6. а) Какими цифрами могут оканчиваться квадраты четных чисел; квадраты нечетных чисел?

б) Какой цифрой может оканчиваться произведение n чисел ($n=2, 3, \dots$), каждое из которых оканчивается: 1) на 1; 2) на 9; 3) на 4; 4) на 6?

в) Сколькими нулями оканчивается произведение натуральных чисел от 20 до 50 включительно?

г) Объясните, почему 2^{4n+2} оканчивается на 4 (n —натуральное число).

7. Докажите: а) $10^n - 1$ кратно 9; б) $n \cdot 10^{n+1} - 10^n \times (n+1) + 1$ кратно 9; в) $10^n + 2$ кратно 6; г) 3^{4n-3} при делении на 5 дает в остатке 3.

8. а) Каких двух цифр достаточно для записи частного от деления $10^{2n} - 1$ на 11?

б) Объясните, почему $0,6 \cdot (6^n - 1)$ —целое число при любом натуральном n .

в) Какой цифрой оканчиваются следующие числа: 4^{12} ; $6^{10} - 5$; $4^{2n} + 4$; 8^{4n+1} ?

9. Объясните, почему верны следующие утверждения: а) $6^{11} + 4^{13}$ кратно 10; б) $9^{14} - 7^{12}$ кратно 10; в) $2^{20} + 3^{20} + 4^{20} + 7^{21}$ кратно 10; г) $3 \cdot 2^{15} + 7 \cdot 5^7 - 4$ кратно 5.

10. а) Всякое простое число (кроме 2 и 3) имеет вид: $6n + 1$ или $6n - 1$ (объясните почему).

б) Верно ли обратное утверждение: всякое число вида $6n \pm 1$ простое?

в) Докажите: $p^2 - 1$ кратно 24, если p —простое число, большее 3.

г) Куб числа, не кратного 7, имеет вид $7n \pm 1$ (доказать).

11. а) Квадрат любого целого числа имеет вид либо $5n$, либо $5n+1$, либо $5n-1$ (объясните).

У к а з а н и е. Надо исходить из того, что любое целое число может быть записано в виде: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k-2$, $5k-1$, где k — произвольное целое.

б) Число вида $5n \pm 2$ не может быть полным квадратом (почему?).

в) Если m и n — целые числа, и притом или каждое из них кратно 5, или ни то, ни другое не кратно 5, то $m^4 - n^4$ кратно 5 (доказать).

г) В каждой тройке пифагоровых взаимно простых чисел одно кратно 5 (доказать).

З а м е ч а н и е. Пифагоровыми числами называются натуральные числа a , b , c , такие, что $a^2 + b^2 = c^2$.

12. а) Два натуральных числа записаны несколькими одинаковыми цифрами, например \overline{abcdek} и \overline{cakbed} . Докажите, что их разность кратна 9.

б) Докажите: сумма всех чисел, записанных одними и теми же цифрами, но в разном порядке, делится на сумму этих цифр.

13. Вычислите: а) $(15 \cdot 3^{11} + 4 \cdot 27^4) : 9^7$; [1]

б) $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$; [0,5]

в) $\frac{5 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9}{(3 \cdot 2^{17})^2}$; $\left[\frac{2}{3} \right]$

г) $4^7 \cdot 2^8 : [3 \cdot 2^{15} \cdot 16^2 - 5 \cdot 2^2 \cdot (2^{10})^2]$; [1]

д) $[5 \cdot 4^{2n-3} - 10 \cdot (2^{n-2})^4] : 16^{n-2}$. [10]

В дальнейшем под каноническим (стандартным) видом многочлена степени n относительно аргумента x будем понимать следующую сумму:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, x — любое число.

При решении некоторых упражнений надо применять теорему о тождественности двух многочленов: необходимым и достаточным условием тождественности многочленов относительно одного и того же аргумента, заданных в каноническом виде, является равенство коэффициентов членов, содержащих аргументы в одинаковых степенях.

14. а) Представьте выражение

$$n(n+1) + (n+1)(n+2) + (n+2)(n+3) + (n+3)(n+4)$$

в каноническом виде многочлена.

б) Покажите, что $y = -x(x+1) + (x+1)(x+2) - (x+2)(x+3) + (x+3)(x+4)$ есть линейная функция относительно x ; найти ее угловой коэффициент и координаты точек пересечения с осями координат.

в) Покажите, что $u = (n+1)(n-2) + (n-2)(n+3) - (n+3)(n-4) - (n-4)(n+5) + (n+5)(n-6) + (n-6) \times (n+7) - (n+7)(n-8) - (n-8)(n+9)$ представляет константу (постоянную величину) при любом значении n .

15. 1) Докажите тождества:

а) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$;

б) $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = (b+c)(c+a) \times$
 $\times (a+b) - 8abc$;

в) $(a+b+1)(a^2+b^2-ab-a-b+1) = a^3+b^3-3ab+1$;

2) Покажите, что $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 > 0$ при любых значениях x .

16. Расположите многочлены:

а) $7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ по степеням $(x-1)$; решение задачи сводится к нахождению таких значений A, B, C, D , что $7x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$,

б) $8x^3 - 12x^2 - 2x + 7$ по степеням $(2x-1)$;

в) $(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 5(x+2) + 1$ по степеням $(x+3)$;

г) $x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 16x - 3$ по степеням $(x-2)$.

17. Выведите формулу возведения в квадрат многочлена на примерах:

$$(a+b+c)^2; (a-b-c+d)^2;$$

$$(a^2-a+1)^2; (a^3-2a^2+3a-4)^2; (x^4-x^3+x^2-x+1)^2;$$
$$(a+b)^4.$$

18. а) Если $a + \frac{1}{a} = s$, то $a^4 + \frac{1}{a^4} = s^2(s^2-4) + 2$ (докажите).

б) Докажите: произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, есть точный квадрат.

19. Найдите произведения:

а) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$;

б) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;

в) $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;

рассмотрите два случая: n — четное, n — нечетное. Затем замените b на $-b$.

Сделайте после того заключение о представлении $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$ в виде произведения $a - b$ или $a + b$ на многочлен степени $(n-1)$ -й относительно a и b .

20. 1) Представьте произведение многочленов в каноническом виде:

а) $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)$;

б) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)$.

2) $(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) =$
 $= 16p(p-a)(p-b)(p-c)$, где $2p = a+b+c$ (доказать).

В упражнениях 21–25 разложите многочлены на множители.

21. а) $x^4 - 1$; б) $x^6 - 1$; в) $x^6 + 1$; г) $a^4 - 2a^2 + 1$;
 д) $a^{12} - 2a^6 + 1$.

22. а) $a^5 + a^3 - a^2 - 1$; б) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$;

в) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$; г) $a^4 + a^2b^2 + b^4$;

д) $x^{4n} - x^{3n} + x^n - 1$; е) $x^{12} - 3x^6 + 1$;

ж) $3x^4y^4 - x^8 - y^8$; з) $x(x^3 - a^3) + ax(x^2 - a^2) + a^3 \times$
 $\times (x - a)$; и) $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$; к) $a^4 - 5a^2 + 4$.

23. а) $bc(b-c) - ca(a-c) + ab(a-b)$;

б) $bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b)$;

в) $ab(a-b) - ac(a+c) + bc(2a+c-b)$;

г) $(a-x)y^3 - (a-y)x^3 + (x-y)a^3$;

д) $bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b)$;

е) $(b-c)(b+c)^2 + (c-a)(c+a)^2 + (a-b)(a+b)^2$.

Указание. Во всех этих многочленах один из двучленов в скобках представляет сумму (или разность) двух других. Так, в первом многочлене $a - c = (a - b) + (b - c)$ преобразуйте данный многочлен следующим образом и далее примените способ группировки: $bc(b-c) - ca(a-b) - ca(b-c) + ab(a-b)$; окончательно получите $(b-c)(c-a)(b-a)$.

24. а) $a^4 + 4b^4$.

Указание. После того как выделите полный квадрат двучлена, дальнейшее преобразование будет ясно: $(a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2) - 4a^2b^2$;

б) $64a^4 + b^8$; в) $x^8 + 1024$; г) $x^4 + 324$; д) $64a^4 + 81$;

е) покажите, что $(2^{2k+1})^2 a^4 + b^{4m}$, где k и m — натуральные числа, разлагается на произведение двух многочленов 2-й степени относительно a и b^m с рациональными коэффициентами.

25. При разложении следующих многочленов полезно иметь в виду, что $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$.

а) $a^3 + 9a^2 + 26a + 24$. Здесь можно начать с выделения куба двучлена: $(a+3)^3 - a - 3$;

б) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$. Выделение куба суммы из $(a-b)^3 + (b-c)^3$ сразу дает результат;

в) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$. Замените $b(c-a)^3 = -b[(b-c) + (a-b)]^3$ и далее воспользуйтесь указанием к № 23;

г) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Выделите сначала полный куб двучлена из $x^3 + y^3$.

26. Сократите дроби:

а) $\frac{5x^2 - x - 4}{x^3 - 1}$. Замените $-x = -5x + 4x$;

б) $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$; в) $\frac{a^4 + a^2 - 2}{a^6 + 8}$;

г) $\frac{a^{2n+1} - a^{2n-1}}{(a^{n+1} - a^n)^2}$; д) $\frac{a^{n+2} - a^{n-1}}{a^n + a^{n-1} + a^{n-2}}$;

е) $\frac{a^{n+x}b^{n-x} - a^{n-x}b^{n+x}}{a^{m+x}b^{m-x} - a^{m-x}b^{m+x}}$.

27. Найдите сумму двумя способами: 1) сначала — сумму первых двух дробей, затем — сумму полученного результата с третьей и т. д.; 2) представьте каждую дробь в виде разности двух дробей:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \dots + \frac{1}{(a+4)(a+5)} \cdot \left[\frac{5}{a(a+5)} \right]$$

28. Выполните действия:

а) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$; $\left[\frac{32}{1-x^{32}} \right]$

б) $\frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1} + \frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1} - \frac{2a^3}{a^4-1}$; $\left[\frac{a}{a^2-1} \right]$

в) $\left(\frac{x}{a+x} + a \right) \left(\frac{a}{a-x} - x \right) - \left(\frac{a}{a+x} + x \right) \left(\frac{x}{a-x} - a \right)$; $[2a]$

$$\text{г)} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right); \quad \left[\frac{(a+b+c)^2}{2bc}\right]$$

$$\text{д)} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) : \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right). \quad \left[\frac{x+1}{x-1}\right]$$

У к а з а н и е. Умножьте делимое и делитель на x^3 .

29. Докажите: а) Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$;

б) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n}$;

в) если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$;

г) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{n+p}{n-p} + \frac{an-bp}{ap+bn} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{n+p}{n-p} \cdot \frac{an-bp}{ap+bn}$;

д) $\frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} + \frac{a-b}{1+ab} = \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ac} \cdot \frac{a-b}{1+ab}$.

В упражнениях г) и д) укажите область допустимых значений букв. Пользуясь тождествами г) и д), найдите несколько троек чисел, сумма которых равна их произведению.

30. Упростите выражение $\frac{at+b}{ct+d}$, подставив вместо t дробь $\frac{-dx+b}{cx-a}$. [x]

31. Выполните действия:

а) $\frac{(b+c)^2 + 2(b^2 - c^2) + (b-c)^2}{(b^4 - 2b^2c^2 + c^4) \left[\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{2}{b^2 - c^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \right]}$. [1]

У к а з а н и е. Разложите в знаменателе многочлен 4-й степени на множители и умножьте на сумму дробей;

б) $\left(\frac{a}{n} - \frac{n-x}{a} + \frac{ax}{n^2 - nx}\right) : \left(\frac{a}{n-x} + \frac{n-x}{a} + 2\right)$. [1]

32. Докажите:

а) если: 1) $a > 0$ и $b > 0$, 2) $M = \frac{a+b}{2}$, $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$,

$M_1 = \frac{M+H}{2}$, $H_1 = \frac{2}{\frac{1}{M} + \frac{1}{H}}$, то $MH = M_1H_1 = ab$;

б) если $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$, $z = \frac{c-a}{c+a}$, то $(1+x)(1+y) \times (1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$.

33. 1) При каких значениях x сумма $\sqrt{x^2+14x+49} + \sqrt{x^2-14x+49}$ равна 14; $2x$; $-2x$?

2) Упростите при различных допустимых значениях a :

а) $\frac{1}{a-3} \sqrt{a^4-18a^2+81}$ и б) $(2a-5) \sqrt{\frac{a}{4a^2-20a+25}}$.

3) Какие из равенств верны: $5\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{5\frac{5}{24}}$;

$\sqrt{7\frac{7}{48}} = 7\sqrt{\frac{7}{48}}$; $6\sqrt{\frac{6}{37}} = \sqrt{6\frac{6}{37}}$; $x\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} = \sqrt{x+\frac{x}{x^2-1}}$?

34. 1) Вычислите:

а) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $(2-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-2)^2$.

2) Верны ли равенства: $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$;
 $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$; $\sqrt{2\sqrt{6}+5} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$?

3) При каких значениях x

$(\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x})^2 = 2 + 2\sqrt{-x^2+8x-15}$?

35. а) Найдите значение $y = 2x^2 - 5ax + 2a^2$ при $x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ и $a = \sqrt{6} - \sqrt{5}$. [39]

б) Проверьте равенство: $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \sqrt{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

36. Упростите:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{6+2\sqrt{2}}} \times$
 $\times \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{6+2\sqrt{2}}}} \times$
 $\times \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+2\sqrt{2}}}}$

[1]

б) $(x+\sqrt{nx})\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2nx}{\sqrt{n}} + \frac{nx}{\sqrt{x}}}$; ($0 < x < n$).

$[(n-x)\sqrt{x\sqrt{x}}]$

87. Освободите от иррациональности знаменатель:

а) $\frac{n+1+\sqrt{n^2-1}}{n+1-\sqrt{n^2-1}}$ ($n \geq 1$ либо $n < -1$); $[n+\sqrt{n^2-1}]$

б) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$;

в) $\frac{2,5}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{7,5}-9\sqrt{5}}{\sqrt{15}-6\sqrt{2,5}}$; $[-\frac{1}{4}\sqrt{2}]$

г) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}$.

38. 1) Освободите от иррациональности числитель

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (b^2-4ac > 0; \quad b \neq 0; \quad c \neq 0, \quad a \neq 0).$$

2) При каких значениях x выражения а) и б) имеют наибольшие значения и чему они равны?

а) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$. [При $x=0$; $\sqrt{0,5}$]

б) $\frac{\sqrt{x+5}-2\sqrt{2}}{x-3}$. [При $x=-5$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$]

3) Докажите: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

($a \geq 0$; $0 < b \leq a^2$), причем в правой части получается сумма радикалов $\sqrt{m \pm \sqrt{n}}$ (где m и n — рациональные числа), если $\sqrt{a^2-b}$ — рациональное число).

4) Пользуясь выведенной формулой, преобразуйте следующие выражения:

а) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$; б) $\sqrt{4+\sqrt{15}}$;

в) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;

г) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \quad (1 \leq x \leq 2)$;

д) $\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}$ сначала при $a \geq 2$, а затем при $1 \leq a < 2$.

39. Докажите: сумма, разность, произведение и частное чисел вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b — рациональные числа, не равные нулю, представляют числа того же вида.

40. Докажите, что $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, если $ax^3=by^3=cz^3$ и $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=1$.

Подберите какую-нибудь тройку чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющую поставленным условиям.

41. а) Докажите: если коэффициенты квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, a , b и c — рациональные числа, и если $ac=mn$, где m и n — рациональные числа, такие, что $m+n=\pm b$, то уравнение имеет рациональные корни.

б) Докажите: при любых значениях a , b и c уравнение $cx^2-2b(x-1)-c(a^2+1)=0$ имеет действительные корни.

в) Докажите: если уравнение $x^2+px+q=0$, где p и q — целые числа, имеет рациональные корни, то они являются целыми числами.

г) Докажите: если уравнения $x^2+px+q=0$ и $x^2+p_1x+q_1=0$ имеют общий корень, то их коэффициенты удовлетворяют следующему условию: $(q-q_1)^2=(p_1q-pq_1) \times (p-p_1)$.

д) Докажите, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ рациональны, когда $p=n+qn^{-1}$, где p , q и n — рациональные числа.

Является ли это условие необходимым? достаточным?

42. 1) Составьте квадратное уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

2) Решите уравнение:

а) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)+20=0$;

$\left[\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{41}); 0; -3\right]$

б) $\frac{x+6a}{x} - \frac{3a-2x}{x-6a} = \frac{12ax-18a^2}{x^2-6ax}$;

$[-a$ при $a \neq 0$; при $a=0$ нет корней]

в) выразите через p и q произведение $(1+x_1^2)(1+x_2^2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$;

г) найдите xy , если $x+y=a$ и $x^4+y^4=b^4$.

$[a^2 \pm \sqrt{0,5(a^4+b^4)}]$

43. 1) Постройте график функции:

а) $y=4-|2x-5|$; б) $y=|x-3|+|x+5|$;

в) $y=0,5|x^2-4x|-1$; г) $y=\sqrt{x+2}$;

д) $y=-\sqrt{x+2}$; е) $y=\frac{1}{x^2}$;

ж) $y=\sqrt{25-x^2}$; з) $y=\sqrt{5x-x^2}$;

и) $y=2x+|x|$; к) $y=x-|2-x|$;

л) $y=x+\sqrt{x-3}$; м) $y=\sqrt{x^2+x-2}$;

н) $y=|x|+\sqrt{x+3}$.

2) Для каждой функции укажите: а) область определения функции; б) область изменения функции; в) при каких значениях аргумента функция возрастает, убывает; г) при каких значениях аргумента значения функции положительны, отрицательны, равны нулю.

44. Постройте график уравнения:

а) $y^2 = 0,5x$; б) $x^2 + y^2 = 25$; в) $x^2 + 4y^2 = 4$;

г) $x^2 - y^2 = 1$; д) $4x^2 - y^2 = 4$.

45. а) Постройте график стоимости n тетрадей; цена тетради 2 коп. за штуку.

б) Постройте график стоимости телеграммы, полагая, что число слов (n) в телеграмме может быть не менее 3; пословная плата 3 коп.; кроме того, за подачу телеграммы берется 10 коп.

в) За проезд на такси установлен следующий тариф: пассажир уплачивает по 10 коп. за каждый километр пути и, кроме того, 10 коп. «за включение счетчика». Постройте график стоимости проезда на такси.

г) Постройте графики: 1) суммы внутренних углов многоугольника; 2) суммы внешних углов; 3) величины внутреннего угла; 4) числа диагоналей, считая каждый раз аргументом число сторон многоугольника $n = 3, 4, 5, \dots$

46. а) На плоскости даны окружность, радиус которой равен r , прямая MN и бесконечное множество прямых, параллельных MN . Число общих точек (y) каждой прямой и окружности можно рассматривать как функцию расстояния (x) прямых от центра окружности. Постройте ее график для следующих значений x : 1) $-r < x < r$; 2) $x = \pm r$; 3) $x < -r, x > r$.

б) Стоимость проезда по железной дороге в пригородном сообщении устанавливается по зонам. На одной из дорог установлен следующий тариф от пункта M до станций каждой зоны, включая ее конечный пункт: I зона ($MA = 5$ км) — 10 коп., II зона ($MB = 14$ км) — 15 коп., III зона ($MC = 23$ км) — 20 коп., IV зона ($MD = 36$ км) — 25 коп., V зона ($ME = 45$ км) — 35 коп., VI зона ($MF = 59$ км) — 40 коп., VII зона ($MG = 70$ км) — 53 коп., VIII зона ($MZ = 85$ км) — 66 коп.

Постройте график стоимости проезда от пункта M (y), приняв за аргумент (x) расстояние от M .

Решите уравнения:

47. а) $|2x - 7| + |x - 17| = 0$; [8; -10]
б) $|3x - 14| - 3|x + 2| = 5$; [0,5]
в) $|x - 3| + |x + 5| = 8$; $[-5 \leq x \leq 3]$
г) $9 - 2x = 4 - |2x - 5|$; $[x \geq 2,5]$
д) $|x - 3| = 1 - 0,5x$. [нет корней]
48. а) $|x^2 - 4x| = 0,5x - 2$; [4]
б) $|x^2 - 5x + 8| = |x^2 - 3x - 50|$; $[-3; 7; 29]$
в) $|x^2 - 40| = 3|x|$; $[\pm 5; \pm 8]$
г) $x^2 + 3x = 1 - 2|x - 1|$; [нет корней]
д) $x^2 - 3|x| = 0$. $[0; \pm 3]$

Решение уравнений 47 — 48 рекомендуется сопровождать построением графиков их левой и правой частей, для чего в ряде случаев полезно выражения, содержащие неизвестное под знаком модуля, перенести в одну сторону.

49. Когда старшему брату было столько лет, сколько сейчас среднему, тогда младшему было 4 года.

Когда среднему будет столько лет, сколько сейчас старшему, тогда младшему будет 16 лет.

В день рождения младшего брата сумма лет старшего и среднего была больше числа лет младшего в настоящее время.

Сколько лет каждому брату в настоящее время? [Младшему 10 л., другим братьям 19 и 13 или 20 и 14 и т. д.]

50. Два тела, двигаясь равномерно по окружности в одном направлении, сходятся через каждые 56 мин, а, двигаясь в противоположных направлениях, встречаются через каждые 8 мин.

Когда оба тела двигались в противоположных направлениях, в некоторый момент времени расстояние по окружности между ними было 40 м, а через 24 сек уже 26 м.

Найдите скорости тел по окружности и длину окружности.

Указание. Найдите сначала скорости тел в долях длины окружности.

[20 м/мин, 15 м/мин, 280 м]

51. Имеются два слитка сплава с различным процентным содержанием меди. Один весом a кг, другой — b кг.

От каждого слитка отрезают по куску одинакового веса. Каждый из отрезанных кусков сплавляют с остатком другого слитка, после чего процентное содержание меди в обоих слитках стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

У к а з а н и е. Введите при решении процентное содержание меди в первом слитке $p\%$ и во втором $q\%$.

$$\left[\frac{ab}{a+b} \text{ кг} \right]$$

52. Между пунктами A и B , расстояние между которыми 150 км, установлено автобусное сообщение.

Из пункта A автобусы выходят в 7, 10, 13, 16, 19, 22 часа. Из пункта B — в 8, 11, 14, 17, 20, 23 часа.

Весь путь, как от A до B , так и от B до A , автобус проходит за 3 часа, из которых 15 мин уходит на остановку в пункте C , отстоящем от A на расстоянии 100 км.

Постройте график движения автобусов (считая их скорости постоянными) в течение суток и подсчитайте, сколько автобусов этой линии встречает каждый автобус на своем пути.

53. На беговой дорожке катка происходит состязание двух конькобежцев в беге на 10 000 м. Когда победитель приходит к финишу, другому остается идти еще целый круг. Найдите длину беговой дорожки (круга), если победитель, проходя каждый круг в среднем на 1,8 секунды быстрее второго конькобежца, закончил дистанцию ровно в 18 минут. [400 м]

54. Два спортсмена тренируются в беге по беговой дорожке на 12,5 круга. Один из них слабее другого, и его выпускают впереди на полкруга. К финишу более сильный приходит все же впереди слабого на 100 м; его время 15 мин 40 сек. Каждые 100 м он пробегает в среднем на 1,2 сек скорее своего противника.

На какую дистанцию шли бегуны? [5000 м]

55. Часы показывают в некоторый момент на 2 мин меньше, чем следует, хотя и идут вперед. Если бы они показывали на 3 мин меньше, но уходили бы в сутки на полминуты больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат эти часы? [0,5 мин]

56. На шоссе расположены последовательно пункты A , B и C . Расстояние от A до B 150 км и от B до C 60 км.

Автобус выходит из C по направлению к A в то самое время, когда навстречу ему выходит из A легковая машина. Автобус останавливается в B на полчаса и, выйдя из B , через 10 мин встречает легковую машину.

Через день автобус вышел из A и в то же время легковая машина из C . Легковая машина после 6 мин остановки в B пришла к месту прежней встречи с автобусом в то время, когда автобус прошел только 0,4 расстояния от A до этого места.

Найдите скорости автобуса и легкой машины.
[60 км/ч, 84 км/ч]

57. Колонна демонстрантов длиной в s км движется по улице со скоростью v км/ч. Велосипедисту, находившемуся в хвосте колонны, поручено передать приказ в головную шеренгу колонны. Велосипедист, передав приказ, тотчас вернулся в хвост колонны, затратив на проезд туда и обратно t мин. Найдите скорость велосипедиста, считая ее постоянной во все время движения.

$$\left[\frac{60s + \sqrt{3600s^2 + v^2 t^2}}{t} \text{ км/ч} \right]$$

58. Из куска жести, имеющего форму прямоугольника с измерениями a и b ($a > b$), вырезаны по углам квадраты. Оставшаяся часть согнута в виде коробки, причем общая площадь стенок оказалась равной площади дна. Найдите стороны вырезанных квадратов.

$$\left[\frac{1}{6} (a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}) \right]$$

59. Из пункта A в пункт B , между которыми s км, отправилась группа туристов. Спустя час из пункта A по той же дороге был отправлен велосипедист с целью догнать туристов и, сообщив им некоторое распоряжение, тотчас вернуться в пункт A .

Велосипедист, передав распоряжение, тотчас вернулся в пункт A в тот момент, когда туристы пришли в пункт B .

Найдите скорость движения туристов, если известно, что она меньше скорости велосипедиста на v км/ч.

$$[0,25 (\sqrt{v^2 + 8vs} - v) \text{ км/ч}]$$

60. Сумма цифр трехзначного числа равна 12, а сумма их квадратов равна 62. Если к данному числу прибавить число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 1131. Найдите данное число.

[516]

61. При умножении двух отрицательных чисел, из которых одно больше другого на 97, ошибочно получено произведение на 1000 меньше истинного. Поэтому, разделив ошибочное произведение на модуль большего множителя, получили в частном 217 и в остатке 24. Найдите данные отрицательные числа.

62. Имеются три слитка весом в 5 кг, 3 кг, 2 кг. Каждый представляет собой сплав серебра и меди. Если сплавить первый и второй слитки, то в этом сплаве будет 75% серебра; если сплавить первый и третий слитки, то в этом сплаве будет 78% серебра; если же сплавить второй и третий слитки, то в этом сплаве будет 85,2% серебра. Сколько процентов серебра содержится в каждом слитке? (Потери при переплавке во внимание не принимаются.)

[72; 80; 93]

63. В открытом сосуде находится 250 г жидкости. Жидкость испарялась в течение двух часов, находясь все время в одинаковых условиях. В конце второго часа ее осталось на 40 г меньше, чем в конце первого. Сколько процентов жидкости испарилось в каждый час?

[20% или 80%]

64. На окружности находятся точки A и B . Расстояние между ними по меньшей дуге окружности равно 200 см. Если точки будут двигаться навстречу по меньшей дуге, то встреча произойдет через 10 сек, а если по большей дуге, то точки встретятся через 14 сек. Точка A может обогнать всю окружность в то время, как B пройдет лишь 120 см. Найдите длину окружности и скорости движения каждой точки.

[480; 16; 4]

65. Найдите основание системы счисления, если:

а) $186_{10} = 354_x$; б) $217_{10} = 1001_x$; в) $1477_{10} = 10501_x$.

66. Докажите, что всякое четное число есть сумма натуральных степеней числа 2.

67. При каких значениях p и q имеет место равенство

$$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4=(x^2+px+qa^2)^2.$$

[$p=5a$; $q=5$]

68. При каких значениях a и b многочлен $6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ делится без остатка на $x^2 - x + b$.

[$a_1 = -7$, $b_1 = -1$; $a_2 = -12$, $b_2 = -2$]

Указание. При решении упражнений 67 и 68 можно воспользоваться условием тождественности двух многочленов.

69. Решите уравнения:

а) $3x^2 + y^2 = 0$; б) $(x-7)^2 + 5(y+2)^2 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + 22x - 18y + 202 = 0$;

г) $4x^2 + y^2 - 20x + 3y + 27,25 = 0$. [— 11; 9]
[2,5; — 1,5]

70. Решите уравнения:

а) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$;

б) $16(x-5)^4 + 3(x-5)^2 = 0$;

в) $(x+3)^4 - 48(x+3)^2 - 49 = 0$; [5]
[— 10; 4]

г) $(x+a)^4 + (x-a)^4 = 2b^4$.

Указание к решению уравнения 77, г. Возведя в четвертую степень двучлены $x \pm a$, получите квадратное уравнение. При его решении рассмотрите три случая:

1) $a^2 < b^2$; 2) $a^2 = b^2$; 3) $a^2 > b^2$.

71. Решите уравнения:

а) $x + 5\sqrt{x-84} = 0$.

Указание. Введите подстановку $\sqrt{x} = z$. Заметьте, что $z \geq 0$;

б) $2\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 1 + 2x - 3x^2$; [— $\frac{1}{3}$; 1]

в) $5x^2 - 80 = 24x + 4\sqrt{5x^2 - 24x + 16}$; [— 3,2; 8]

г) $x^2 - 7\sqrt{x^2 - 16x} = 16x - 6$. [— 2; 18; $8 \pm \sqrt{65}$]

72. Решите уравнения:

а) $x^3 - \frac{108}{x^3} = 215,5$;

б) $\frac{3x}{x^2 - x - 5} + \frac{x^2 - x - 5}{x} - 4 = 0$ (введите $z = \frac{x^2 - x - 5}{x}$); [— 1; 5; $1 \pm \sqrt{6}$]

в) $\frac{1}{x(x-8)} - \frac{1}{(x-4)^2} = \frac{1}{45}$; [— 2; 10]

г) $x^2 + \frac{4}{x^2} + 6x + \frac{12}{x} = 23$. [1; 2; $\frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{73})$]

73. Решите уравнения:

а) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Указание. Это уравнение называется возвратным. Разделите все члены уравнения на x^2 и введите подстановку $x + \frac{1}{x} = z$;

$$\begin{aligned} \text{б) } 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 &= 0; & \left[-3; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2 \right] \\ \text{в) } 15x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 16x + 15 &= 0; & \left[-\frac{3}{5}; \frac{5}{3}; \pm 1 \right] \\ \text{г) } 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 &= 0. & \left[2; \frac{1}{2}; \pm 1 \right] \end{aligned}$$

74. Решите графически системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x^2 - y = 4 \end{cases} & \quad \text{в) } \begin{cases} y = |x^2 - 4x - 5| \\ y + |x - 2| = 5 \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} y = 2\sqrt[3]{x+5} \\ y = \frac{3}{5}x + 3 \end{cases} & \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 + y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

75. Докажите: если в арифметической прогрессии $d = 2a_1$, то отношение суммы ее n первых членов к сумме n ее последующих членов есть константа. Найдите ее.

76. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$. Ни один из ее членов не равен нулю. Докажите:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 n}.$$

77. Напишите несколько первых членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма ее n первых членов равна $an^2 - n$.

78. Докажите: если в арифметической прогрессии число членов n нечетное и если $S_n \neq 0$, то отношение суммы ее членов, стоящих на нечетных местах, к сумме членов, стоящих на четных местах, равно $(n+1):(n-1)$.

79. Напишите какие-нибудь арифметические прогрессии, чтобы в одной из них сумма всех ее 11 членов была равна сумме последних 4 членов, а в другой — сумма всех ее 20 членов была равна сумме первых 11 членов.

80. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$. Докажите, что следующие последовательности

$$\text{а) } a_1 + a_2, 2a_2, a_2 + a_3, 2a_3, \dots, a_n + a_{n+1}, 2a_{n+1}, a_{n+1} + a_{n+2}, \dots$$

$$\text{б) } a_1 + a_2, a_3 + a_4, \dots, a_n + a_{n+1}, a_{n+2} + a_{n+3}, \dots$$

также арифметические прогрессии. Как изменились их разности по сравнению с разностью первоначальной арифметической прогрессии?

81. Произведение первого члена арифметической прогрессии на ее разность равно 5. Сумма ее 4-го и 6-го членов равна 42. Сколько членов этой прогрессии надо взять, чтобы их сумма была равна 235?

82. Найдите число членов арифметической прогрессии, если

$$a_7 + a_9 = 6, \quad a_5 + a_{10} = 1 \quad \text{и} \quad 0 < S_n < 37.$$

83. Напишите две такие арифметические убывающие прогрессии, чтобы в каждой из них сумма первых ее 11 членов была равна сумме первых 19 членов.

84. Дана геометрическая прогрессия $9^{x_1}, 9^{x_2}, 9^{x_3}, \dots, 9^{x_n}, \dots$. Ее знаменатель равен 27. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ — арифметическая прогрессия. Найдите ее разность. [1,5]

85. Если лист бумаги (достаточно больших размеров) толщиной в 0,1 мм сложить пополам, затем еще раз пополам и так до 10 раз, то какой толщины получится пачка?

86. Первый член арифметической прогрессии равен 216. Ее члены a_1, a_4, a_8 можно рассматривать как 4-й, 5-й и 6-й члены геометрической прогрессии.

Найдите суммы первых 19 членов этой арифметической прогрессии и первых 7 членов геометрической прогрессии.

[Два решения: 1) 4104 и 1512;
2) 0 и 2059.]

Геометрия

Для сокращения записи условия задач на построение треугольников используются общеизвестные обозначения: a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — противолежащие углы, $2p$ — периметр треугольника, h_a — высота, проведенная к стороне a , m_a — медиана к стороне a , l_A — биссектриса угла A , r — радиус вписанного круга, R — радиус описанного около треугольника.

В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, c — гипотенуза, h — высота, проведенная к гипотенузе. В равнобедренном треугольнике b — основание, a и c — боковые стороны.

Решение некоторых задач на построение требует умения построить на отрезке AB , как на хорде, дугу окружности, вмещающую данный угол α .

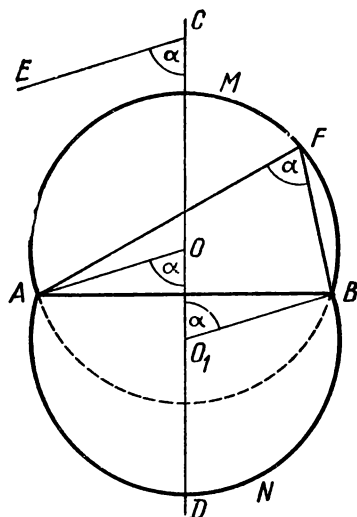


Рис. 1

Даем кратко одно из возможных решений этой задачи.

Проводим ось симметрии точек A и B , т. е. прямую CD , перпендикулярную отрезку AB через его середину. При произвольной точке C строим $\angle ECD = \alpha$. Из концов отрезка AB проводим прямые, параллельные EC , до пересечения с CD в точках O и O_1 .

Дуги AMB и ANB окружностей с центрами O и O_1 и радиусом $AO = BO_1$ удовлетворяют требуемому условию. В самом деле, нетрудно доказать, что, например, $\angle AFB = \alpha$.

Задачи на построение

Задачи 1—12 на построение треугольников по следующим данным.

- | | | |
|----------------------|--------------------|---------------------|
| 1. a, b, m_a . | 5. a, A, h_b . | 9. a, B, r . |
| 2. a, b, m_c . | 6. a, h_a, h_b . | 10. a, A, h_a . |
| 3. a, m_b, h_b . | 7. a, m_a, h_b . | 11. a, A, m_a . |
| 4. m_a, m_b, m_c . | 8. c, A, m_b . | 12. $a : b, C, r$. |

13. В плоскости дана прямая a и две точки A и B в одной полуплоскости; расстояние от точки A до прямой a больше, чем расстояние от точки B до той же прямой. Найдите на прямой a : 1) такую точку M , чтобы разность $AM - MB$ была наибольшей; 2) такую точку N , чтобы сумма $AN + NB$ была наименьшей.

14. Постройте общие касательные к двум окружностям. Рассмотрите различные случаи взаимного расположения окружностей.

15. Постройте параллелограмм по стороне a , высоте h_a и диагонали d_1 .

16. Через точку, данную внутри угла, провести прямую так, чтобы ее отрезок между сторонами угла в данной точке делился пополам.

17. Постройте треугольник по a , m_b и углу между медианами, проведенными из вершин B и C , обращенному к стороне a .

18. Постройте параллелограмм по его стороне и углу между диагоналями.

19. Даны три точки окружности, центр которой недоступен. Постройте еще какую-либо точку этой окружности.

20. В треугольнике ABC вершины A и B недоступны. Проведите медиану из вершины C .

21. Через данную точку M провести к окружности, центр которой недоступен, касательную. Два случая: а) точка M лежит на окружности, б) точка M лежит вне окружности.

22. Какое множество точек образуют середины всех хорд окружности, проходящих через точку M . Два случая: а) точка M принадлежит окружности, б) точка M находится внутри круга.

23. В окружности проведены два диаметра. Постройте хорду, которая делится этими диаметрами на три равные части.

24. Постройте трапецию по ее диагоналям, углу между ними и одной из боковых сторон.

25. Через точку, лежащую вне окружности, проведите секущую так, чтобы ее отрезок, лежащий внутри данной окружности, имел данную длину.

26. Постройте треугольник по углу B , l_B и отношению отрезков $AD : DC = m : n$, где D — основание высоты, проведенной из вершины B .

27. В данный угол впишите окружность, проходящую через данную точку.

28. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трех данных прямых. Рассмотрите два случая: а) все три прямые параллельны, б) прямые — не параллельны.

29. В данной окружности проведены два диаметра. Постройте хорду, которая этими диаметрами делится на три равные части.

30. Дан отрезок a . Постройте отрезки $3a$, $\frac{8}{5}a$, $a\sqrt{5}$, $a\sqrt{6-\sqrt{5}}$.

31. Постройте треугольник, если стороны его пропорциональны числам $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ и если дан R .

32. В данный равнобедренный треугольник вписать прямоугольник, отношение сторон которого $1:\sqrt{2}$ (две вершины прямоугольника должны лежать на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах).

Задачи 33—34 решите только с помощью одной линейки (односторонней).

33. а) Даны два параллельных отрезка. Разделите их пополам.

б) Зная середину отрезка a , провести прямую, параллельную ему и проходящую через точку $M \notin a$.

34. Дан параллелограмм. Проведите через его центр симметрии прямую, параллельную одной из его сторон.

35. С помощью двусторонней (с параллельными краями) линейки: а) разделить данный угол пополам; б) через данную на прямой a точку M проведите прямую, ей перпендикулярную.

Задачи 36—38 решите только с помощью циркуля.

36. Даны две точки прямой. Постройте третью точку той же прямой.

37. Даны отрезки a , b и c ($c < 2b$). Постройте отрезок x , такой, чтобы $b:c = a:x$.

Указание. Постройте две концентрические окружности с радиусами a и b и затем два сектора с равными центральными углами — один в окружности радиуса b и другой — в окружности радиуса a .

38. Дан круг. Найдите его центр.

Задачи на доказательство

39. В прямоугольном треугольнике $r = p - c$ (докажите).

40. Дан угол AOB и точка M вне его. Из точки M опущены перпендикуляры на стороны данного угла. Докажите: биссектриса угла между этими перпендикулярами отсекает от угла AOB равнобедренный треугольник (проведите исследование задачи).

41. Вписанный угол вращается вокруг вершины, не изменяя величины. Докажите: хорда, стягивающая дугу, на которую опирается данный угол, скользит по плоскости, оставаясь касательной к окружности, концентрической с данной.

42. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, выходящих из данной на ней точки.

43. Две окружности касаются одна другой. Через точку их касания проведена секущая. Докажите, что касательные к окружностям в точках их встречи с секущей параллельны между собой (рассмотрите два случая: внешнего и внутреннего касания).

44. Две окружности имеют внутреннее касание в точке C . В какой-либо точке M внутренней окружности проведена к ней касательная, встречающая внешнюю окружность в точках A и B . Докажите, что отрезки AM и BM видны из точки C под равными углами.

45. A_1 , B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC . Докажите, что проведенные высоты являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$.

46. Если две биссектрисы углов треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

47. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . Через точку D проведена прямая до пересечения со стороной AC в точке E так, что угол CDE равен углу BAC . Докажите, что отрезки BD и DE равны между собой.

48. Внутри квадрата $ABCD$ из точки D как из центра проведена дуга через вершины A и C . На AD как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Отрезок прямой, соединяющий произвольную точку P дуги AC с вершиной квадрата D , пересекает проведенную полуокружность в точке K . Докажите, что длина отрезка PK равна расстоянию точки P до стороны квадрата AB .

49. Если в треугольнике h_c есть средняя пропорциональная между проекциями a и b на c и если углы A и B острые, то угол $C = 90^\circ$ (докажите).

50. Две диагонали правильного пятиугольника, не исходящие из одной вершины, пересекаясь, делятся в среднем и крайнем отношении¹ (докажите).

51. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников (докажите).

52. Во всяком треугольнике произведение двух его сторон равно произведению диаметра описанного круга на высоту, опущенную на третью сторону (докажите).

¹ Отрезок AB разделен в среднем и крайнем отношении точкой M , принадлежащей отрезку, если $AB:AM=AM:MB$.

53. Если площадь данного треугольника равна S , то площадь треугольника, сторонами которого служат медианы данного, равна $\frac{3}{4}S$ (докажите).

54. В треугольнике имеет место соотношение $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ (докажите).

55. а) Площадь многоугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей подобных ему многоугольников, построенных на катетах как на сходственных сторонах (докажите).

б) На сторонах прямоугольного треугольника вне его построены квадраты. Ближайшие вершины каждого квадрата соединены. Докажите, что полученные таким образом треугольники и данный прямоугольный равновелики.

Задачи на вычисление

56. а) Внутренние углы треугольника находятся в отношении 3:5:7. В каком отношении находятся его внешние углы?

б) Внешние углы выпуклого четырехугольника находятся в отношении 1:2:3:4. В каком отношении находятся его внутренние углы?

в) Верны ли утверждения: 1) внутренние углы треугольника могут быть пропорциональны любой тройке положительных чисел; 2) внешние углы треугольника также могут быть пропорциональны любой тройке положительных чисел?

57. а) Биссектриса прямого угла C в треугольнике образует с медианой, проведенной из вершины того же угла, угол в 22° . Найдите угол, образованный данной медианой с высотой, проведенной из вершины C , и углы данного треугольника.

б) Один из углов треугольника равен 110° . Найдите 1) угол между высотами треугольника и 2) угол между биссектрисами, проведенными из вершин двух других углов треугольника.

58. К окружности проведены две касательные, образующие между собой угол в 60° . Расстояние между точками касания равно a . Через произвольную точку меньшей из дуг, заключенных между точками касания, проводится

касательная. Найдите периметр треугольника, образованного этими тремя касательными. [2a]

59. В угол, равный 50° , вписана окружность. Через произвольную точку меньшей из дуг этой окружности, заключенных между точками касания, проводится касательная. Под каким углом виден расположенный внутри данного угла отрезок этой касательной из центра окружности? [65°]

60. Отношение сторон данного прямоугольника $ABCD$ $AB : AD = 1 : 3$; AD точками M и N делится на три равные части. Найдите сумму углов AMB , ANB и ADB .

61. Найдите длину хорды, если дан радиус круга r и расстояние a одного конца хорды до касательной, проведенной через другой ее конец. [$\sqrt{2ar}$]

62. Радиус кругового сектора равен R , хорда его дуги равна a . Найдите радиус круга, вписанного в этот сектор.

$$\left[\frac{aR}{a+2R} \right]$$

63. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Найдите расстояние от центра вписанного в треугольник круга до высоты, проведенной к гипотенузе.

$$[1 \text{ см}]$$

64. В круг, радиус которого равен 1, вписан правильный двенадцатиугольник. Найдите длины различных по величине его диагоналей. [$1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{2+\sqrt{3}}; 2$]

65. Медианы треугольника равны 13 см, 14 см, 15 см. Найдите его площадь. [112 кв. см]

66. Боковые стороны треугольника a и b , биссектриса делит основание на отрезки p и q . Найдите длину этой биссектрисы.

У к а з а н и е. Опишите окружность около данного треугольника и воспользуйтесь теоремой о хордах, пересекающихся внутри круга.

$$[\sqrt{ab-pq}]$$

67. Два четырехугольника подобны. Три стороны одного равны трем сторонам другого. Неравные стороны имеют длины 81 см и 16 см. Найдите длины равных сторон этого четырехугольника.

$$[24 \text{ см}, 36 \text{ см}, 54 \text{ см}]$$

68. Точка M лежит внутри угла в 60° . Ее расстояния от сторон угла равны a и b . Найдите расстояние точки M до вершины данного угла.

$$\left[\frac{2}{3} \sqrt{3(a^2 + ab + b^2)} \right]$$

69. На отрезке $AB = 4a$ как на диаметре построен полу-
круг, его центр O . На радиусах AO и OB по одну сторону
от AB построены два полукруга. Найдите радиус круга,
касающегося всех трех построенных полукругов. $\left[\frac{2}{3}a\right]$

70. Основания трапеции a и b . Найдите длину отрез-
ка прямой, параллельного основаниям, заключенного между
боковыми сторонами трапеции: 1) проходящего через точку
пересечения диагоналей трапеции; 2) делящего трапецию
на две подобные между собой; 3) проходящего через сере-
дину боковой стороны и 4) делящего трапецию на две
равновеликие.

Докажите также, что второй из вычисленных отрезков
делит на две подобные не только данную трапецию, но
и трапецию, основаниями которой служат первый и тре-
тий отрезки.

Сравните полученные результаты с задачей 32а в раз-
деле «Арифметика и алгебра».

71. Треугольник ABC задан координатами своих вер-
шин: $C(0; 0)$, $B(a; 0)$, $A(b \cos C; b \sin C)$.

Докажите, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

где C — угол между сторонами a и b .

Полученное соотношение носит название теоремы
косинусов.

Исследуйте формулу для $0^\circ < C < 90^\circ$, $C = 90^\circ$,
 $90^\circ < C < 180^\circ$.

72. Докажите, что во всяком треугольнике ABC :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

У к а з а н и е. Используйте результаты задачи 52.

Верно ли полученное соотношение, если один из
углов треугольника прямой, тупой?

73. Найдите стороны и углы треугольника по следую-
щим данным:

а) $a = 18,3$; $b = 17,2$; $c = 16,5$;

б) $a = 18,4$; $b = 20,5$; $C = 36^\circ 12'$;

в) $a = 27,0$; $b = 40,0$; $A = 38^\circ$;

г) $a = 28,8$; $b = 30,0$; $A = 73^\circ 44'$;

д) $a = 25,0$; $b = 54,2$; $A = 35^\circ 12'$;

е) $a : b : c = 13 : 14 : 15$;

ж) $a = 0,35$; $b = 1,2$; $c = 1,25$;

з) $a = 18$; $b = 15$; $c = 25$.

74. Докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

75. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

76. Вычислите медианы треугольника по следующим данным: а) a ; b ; c ; б) 24; 27; 39; в) 14; 50; 48.

77. Докажите, что во всякой трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

78. Найдите углы ромба, в котором сторона есть средняя пропорциональная между диагоналями. $[30^\circ; 150^\circ]$

79. Сторона правильного n -угольника, вписанного в круг радиуса R , равна a_n . Выразите сторону правильного многоугольника с числом сторон $2n$: а) через a_n и R ; б) через R и центральный угол, образованный радиусами, проведенными в концы a_{2n} .

80. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника делит противлежащий катет в отношении $\sqrt{3}:2$. Найдите углы этого прямоугольного треугольника.

81. В трапецию, большее основание которой равно a и острый угол равен 60° , вписан круг, и около этой трапеции описан круг. Найдите расстояние между центрами кругов.

$$\left[\frac{a\sqrt{3}}{9} \right]$$

82. Точка A находится от прямой MN на расстоянии a . Данным радиусом r описана окружность так, что она проходит через точку A и касается прямой MN в точке B . Найдите длину AB .

$$[\sqrt{2ar}]$$

83. Постройте отрезки x , если известны отрезки a и b (укажите, при каких соотношениях a и b возможны построения):

$$\begin{aligned} \text{а) } x &= \sqrt{\sqrt{2}ab}; \quad \text{б) } x = \sqrt{a^2 - 4b^2}; \\ \text{в) } x &= a + \sqrt{b^2 - 4ac}; \quad \text{г) } x = a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}. \end{aligned}$$

84. Постройте корни квадратного уравнения $x^2 + px - q^2 = 0$, считая p и q известными отрезками.

85. а) Разделите данный отрезок a в кратном и среднем отношении («золотое деление»), т. е. найти отрезок x , удовлетворяющий уравнению: $a : x = x : (a - x)$.

б) Окружность радиуса R разделена на пять равных частей. Точки деления соединены через одну. Найдите длину хорды и сторону пятиугольника, образовавшегося в результате пересечения хорд.

86. Постройте отрезки x и y , если $x + y = a$ и $\sqrt{xy} = b$.

87. Постройте отрезки x и y , если $x - y = a$ и $\sqrt{xy} = b$.

У к а з а н и е. Постройте сначала прямоугольный треугольник по катетам b и $\frac{a}{2}$, продолжите катет $\frac{a}{2}$ за вершины острого и прямого углов и проведите полуокружность с центром в вершине этого острого угла радиусом, равным гипотенузе. Вершина прямого угла разделит диаметр на отрезки x и y .

88. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных пересекающихся прямых равна постоянной величине c .

У к а з а н и е. Рассмотрите сначала случай пересечения данных прямых под прямым углом.

89. Основание BC треугольника остается неподвижным, а вершина A передвигается параллельно BC . Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников, получающихся при движении вершины A .

90. Найдите геометрическое место центров окружностей, отсекающих на сторонах данного угла равные хорды.

91. Отрезок a скользит по плоскости так, что его концы перемещаются по двум данным взаимно перпендикулярным прямым. Какую линию описывает при этом середина отрезка a ?

92. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

93. Постройте квадрат, равновеликий данному треугольнику.

94. Постройте: а) треугольник, равновеликий данному выпуклому многоугольнику; б) квадрат, равновеликий тому же многоугольнику.

95. Даны два подобных многоугольника. Постройте многоугольник, площадь которого равна сумме площадей данных.

96. Постройте квадрат, площадь которого в 3 раза больше площади данного квадрата.

97. Постройте два неконгруэнтных равновеликих прямоугольника.

98. Дан ромб. Постройте равновеликий ему прямоугольник, одна из сторон которого была бы равна меньшей диагонали ромба.

При каком соотношении между диагоналями ромба периметр построенного прямоугольника равен периметру ромба?

Содержание

Предисловие	3
В. Г. Болтянский, Г. Г. Левитас. Делимость чисел и простые числа	5
§ 1. Целые числа и действия над ними	—
§ 2. Теоремы о делимости	6
§ 3. Деление с остатком	8
§ 4. Существование и единственность деления с остатком	10
§ 5. Сравнения	15
§ 6. Решение задач с помощью сравнений	16
§ 7. Периодичность остатков при возведении в степень	19
§ 8. Взаимно простые числа	22
§ 9. Признаки делимости	28
§ 10. Признаки делимости, связанные с разбиением цифр числа на группы	33
§ 11. Наибольший общий делитель	37
§ 12. Наименьшее общее кратное	41
§ 13. Простые числа	44
§ 14. Бесконечность множества простых чисел	49
§ 15. Разложение на простые множители	51
Ответы и указания к упражнениям	57
К учителю	69
Р. С. Гутер. Системы счисления и арифметические основы работы электронных вычислительных машин	70
§ 1. Системы счисления. Непозиционные системы	—
§ 2. Позиционные системы счисления. Десятичная система	72
§ 3. Позиционные системы с другим основанием	75
§ 4. Восьмеричная система счисления	79
§ 5. Перевод целых чисел из одной позиционной системы счисления в другую	81
§ 6. Дробные числа и способы их записи. Перевод дробей из одной позиционной системы в другую	84
§ 7. Зачем нужны различные позиционные системы?	90
§ 8. Двоичная система счисления. Двоичная арифметика	92
§ 9. Смешанные системы счисления	99
§ 10. Двоичный сумматор	104
Ответы к упражнениям	107
Несколько методических указаний для учителя	109
Н. Я. Виленкин. Элементы теории множеств	110
§ 1. Понятие множества	—
§ 2. Пустое множество	116
§ 3. Числовые множества	117
§ 4. Множества точек на плоскости	120

§ 5. Подмножества	129
§ 6. Пересечение множеств	131
§ 7. Пересечение множеств и уравнения	134
§ 8. Системы уравнений и неравенств	135
§ 9. Равносильные системы уравнений	137
§ 10. Объединение множеств	140
§ 11. Объединение множеств и уравнения	142
§ 12. Совокупность систем уравнений	144
§ 13. Разбиение множеств	146
§ 14. Вычитание множеств	147
§ 15. Алгебра множеств	148
§ 16. Счетные множества	153
§ 17. Свойства счетных множеств	154
§ 18. Несчетные множества	159
§ 19. Взаимно-однозначное соответствие между множествами	161
§ 20. Мощность множества	164
Заклучение	165
Ответы и указания к упражнениям	—
Обращение к учителю	172
И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. Метод координат	174
§ 1. Координаты точки на прямой	176
§ 2. Координаты точки на плоскости	185
§ 3. Координаты точки в пространстве	213
Дополнение	221
И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. Функции и графики	227
Введение	—
§ 1. Некоторые примеры	233
§ 2. Линейная функция	246
§ 3. Функция $y = x $	249
§ 4. Квадратный трехчлен	259
§ 5. Дробно-линейная функция	272
§ 6. Графики рациональных функций	281
§ 7. Разные задачи	292
Ответы и указания	302
Н. Н. Шоластер, В. А. Прусакова. Номограммы	304
§ 1. Введение	305
§ 2. Номограммы с равномерными параллельными шкалами	308
§ 3. Номограммы с неравномерными параллельными шкалами	316
§ 4. Номограммы с логарифмическими параллельными шкалами	321
§ 5. Номограммы с одной криволинейной шкалой	326
К. П. Сикорский. Решение задач по общему курсу	337
Арифметика и алгебра	—
Геометрия	355

**Дополнительные главы по курсу
МАТЕМАТИКИ
7—8 классов
для факультативных занятий**

Редактор Н. И. НИКИТИНА

Художественный редактор Е. Н. ҚАРАСИК

Технический редактор З. Б. ХАМИДУЛИНА

Корректоры Н. И. НОВИКОВА, Т. Н. СМЕРНОВА

Сдано в набор 30/1 1973 г. Подписано к печати
5/11 1974 г. 84×108¹/₃₂. Бумага типограф. № 2.
Печ. л. 11,5. Услов. л. 19,32. Уч.-изд. л. 17,59. Ти-
раж 300 тыс. экз.

Издательство «Просвещение» Государственного
комитета Совета Министров РСФСР по делам
издательства, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинград-
ская типография № 1 «Печатный Двор» имени
А. М. Горького Союзполиграфпрома при Госу-
дарственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной
торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчин-
ская ул., 26. Заказ 879

Цена без переплета 48 к., переплет 10 к.,

58к.

